EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

maart 09
nr 5
jaargang 84

Doorlopende leerlijnen

Computers en wiskunde

Wiskunde en LWT

Wiskunde en Escher

WiVa

cos(π/17)





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

maart
09
nr 5
jaargang 84



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Bram van Asch
Klaske Blom, hoofdredacteur
Rob Bosch
Hans Daale
Gert de Kleuver, voorzitter
Dick Klingens, eindredacteur
Wim Laaper, secretaris
Marjanne de Nijs
Joke Verbeek

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Klaske Blom,
Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 57,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 28,00
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 55,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv:
t.a.v. Annemieke Boere
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: a.boere@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Klaske Blom]

Lezers Euclides

Weet u dat u als lezersgroep in redactievergaderingen vaak onderwerp van gesprek bent? We vragen ons regelmatig af hoe we *Euclides* interessant houden voor een lezersgroep die nogal uiteenlopend is qua interesse, werkveld en opleiding. Het is onhaalbaar om te proberen elk artikel lezenswaardig te maken voor iedereen. Wat we belangrijk vinden is dat u voldoende van uw gading vindt. Regelmatig horen we dat we te weinig schrijven voor collega's in het vmbo en ons te veel richten op zaken uit de Tweede Fase. Er zijn ook lezers die de wiskunde missen in ons blad. Deze verschillende geluiden hebben we goed gehoord en ons voorgenomen om ze als leidraad voor ons beleid mee te nemen. U mag ons er aan houden en ook zelf uw bijdrage leveren aan een vakblad waaraan u wat heeft als docent.
Dit werd bijvoorbeeld gedaan door Mike Weijmans. Hij onderzocht hoe je jongens die de bouw ingaan en niet geïnteresseerd zijn in wiskunde, toch elementair ruimtelijk inzicht laat opdoen en hoe je ze bijvoorbeeld leert om specie samen te stellen in de juiste verhoudingen water en cement. Deze jongens hebben niets aan de constructie van een 17-hoek waarover Kees Jonker en Dick Klingens schrijven. Maar misschien vindt u het wel een heerlijke uitdaging om dit artikel eens helemaal na te pluizen, met potlood, en een kladblaadje ernaast. We streven naar diversiteit; diversiteit die ons als beroepsgroep kenmerkt en inspireert.

Heftige discussies, onverwachte wendingen

Om nog even door te gaan op dit thema: we zijn ook verschillend in onze opvattingen en idealen over goed onderwijs. Dat er behoorlijk wat in beweging is wat betreft onderwijsvernieuwingen in de Tweede Fase, heeft u kunnen lezen in de bijdrage van Marian Kollenveld, 'Kunt u het nog volgen?', in het decembernummer. En dat er een 'rekenoorlog' schijnt te woeden, vermelden onze dagelijkse kranten met enige regelmaat. Ach en wee, en vroeger was alles beter… Echt waar? Wie zal het zeggen? Velen blijken hierover iets te zeggen en te schrijven; de vraag is of er goed geluisterd en gelezen wordt. In dit nummer komt de diversiteit van de 'wiskundewereld' tot uiting en wordt veel geschreven over vernieuwingen. Ik vind dit een groot goed: laten we kennis nemen van elkaars opvattingen en op grond van argumenten met elkaar in gesprek gaan.
Anne van Streun legt in het derde deel van zijn serie over doorlopende leerlijnen uit wat we beoogden met ons onderwijs in de jaren zestig en zeventig en gaat in op de breuk in de doorlopende leerlijnen die veroorzaakt wordt door de overgang naar een ander onderwijstype. Hij benadrukt dat de 'stevige discussie over de examenprogramma's havo/vwo tussen het onderwijsveld en het ministerie over doorstroomrelevantie maar een beperkt deel is van de algemene aansluitingsproblematiek' en zet dat – in mijn ogen prachtig – uiteen. In het al genoemde stuk van Marian Kollenveld besprak ze o.a. de discussie over doorstroomrelevantie en de (onmogelijke) consequenties van de door staatssecretaris Van Bijsterveldt genomen maatregelen voor de praktijk van het wiskundeonderwijs.
Henk Pfaltzgraff en Jan van de Craats zijn beiden naar aanleiding hiervan in de pen geklommen en leveren in dit nummer een bijdrage aan de 'stevige discussie'.
En wat is uw standpunt? Waar moet het volgens u naar toe met ons reken- en wiskundeonderwijs? Mocht u zich geroepen voelen om ook te reageren en vanuit uw perspectief een bijdrage te leveren aan de discussie, dan bent u van harte uitgenodigd om iets naar de redactie te sturen. Wij hopen dat de discussie ook en vooral door docenten in de scholen gevoerd zal worden, daar waar de straks de in Den Haag genomen besluiten vertaald moeten worden naar de praktijk.

Om af te koelen

Mocht u ernstig verhit geraakt zijn na lezing van al deze heftige materie, dan vindt u gelukkig nog bijdragen om bij te ontspannen: bijvoorbeeld de puzzelrubriek van Frits Göbel en een enthousiasmerend stuk van Bart Zevenhek over de nieuwe website 'Escher en de wiskunde' die is ondergebracht bij het Escher-museum. U kunt uw leerlingen nog tot 1 juni 2009 mee laten doen aan een Escher-prijsvraag. Kijk snel! En weet u wie de eerste officieel geregistreerde docent wiskunde is? Lees het artikel van Marianne Lambriex over de laatste WiVa-ontwikkelingen.
En als u dan toch op de Verenigingspagina's beland bent, treft u daar ook een verslag aan van Kees Lagerwaard over de onderwerpen die in het bestuur van de NVvW aan de orde zijn.
We stellen het op prijs om hierover vanuit het bestuur geïnformeerd te worden; met dank aan Kees dus. Ik wens u weer veel genoegen met dit nieuwe nummer van *Euclides*.

Inhoud

Doorlopende Leerlijnen Rekenen en Wiskunde

DEEL 3: AANSLUITING OP VERVOLGOPLEIDING EN BEROEP

[Anne van Streun]

1. Oriëntatie

In deel 1 van deze reeks (in: *Euclides 83*-8) ging het over het rekenen en de aansluiting tussen basisschool en voortgezet onderwijs, zoals beschreven in het rapport van de commissie *Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen*[1]. Het vervolg (in: *Euclides 84*-3) gaf in het kort weer wat de inhoud van het rapport van de programmacommissie onderbouw havo/vwo van de Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs is. (In het voorjaar van 2009 komt het trajectenboek voor de onderbouw havo/vwo uit met de nadere uitwerking van dat rapport.) In dit artikel gaat het meer in het algemeen over de vraag hoe algemeen vormend wiskundeonderwijs kan of moet aansluiten op de meer toegespitste vervolgopleidingen, op de beroepssituatie en het maatschappelijk gebruik van wiskunde. De stevige discussie over de examenprogramma's havo/vwo tussen het onderwijsveld en het ministerie ver doorstroomrelevantie is maar een beperkt deel van de algemene aansluitingsproblematiek. Die heeft niet alleen te maken met leerstof, maar ook met de manier waarop mensen informatie verwerken, informatie in hun lange termijn geheugen vastleggen en vervolgens op het goede moment weer kunnen oproepen. Over dat laatste meer in deel 4 van deze serie.

2. Wiskundigen over wiskunde

Voordat we ingaan op de doelen van algemeen vormend wiskundeonderwijs is het verhelderend om te bekijken wat wiskundigen zelf vinden van hun vak, het bedrijven van wiskunde, het doen van wiskundig onderzoek. Keith Devlin[2] heeft voor een breed publiek geprobeerd de essentie van de wiskunde uiteen te zetten; de meeste wiskundigen kunnen zich tegenwoordig goed vinden in een definitie van wiskunde als *de wetenschap van patronen*. Wat een wiskundige doet, is het onderzoeken van abstracte 'patronen', numeriek, van vorm, van beweging, van gedrag, visueel of mentaal, statisch of dynamisch, kwalitatief of kwantitatief, praktijkgericht of theoretisch. Aldus Kevlin.

Aan het slot van zijn boek waarin hij zes centrale thema's in de wiskunde heeft besproken, karakteriseert Kevlin wiskundige activiteit als volgt:

'*Want ook al kent de wiskunde nóg zo veel verschillende facetten, en ook al zijn er nóg zo veel aanknopingspunten met de meest uiteenlopende disciplines, toch blijft de wiskunde uiteindelijk één geheel. Welk verschijnsel men ook wiskundig onderzoekt, de wiskundige aanpak blijft in grote trekken toch steeds hetzelfde. Altijd begint men met vereenvoudigen, waardoor de kernbegrippen geïdentificeerd en geïsoleerd worden. Daarna worden de kernbegrippen steeds dieper geanalyseerd; de relevante patronen worden ontdekt en onderzocht. Men probeert de zaak te axiomatiseren. Het abstractieniveau neemt toe. Stellingen worden geformuleerd en bewezen. Verbanden met andere delen van de wiskunde worden blootgelegd, of misschien eerst alleen maar vermoed. De theorie wordt gegeneraliseerd, waardoor er opnieuw overeenkomsten en verbanden ontdekt worden met andere gebieden in de wiskunde.*'

Ook Nederlandse wiskundigen laten zich nu en dan uit over wat 'hun' wiskunde inhoudt en voor hen betekent. In het interessante boekje 'Opgelost'[3] komen enkelen aan het woord.

Lex Schrijver (combinatoriek en algoritmiek), die onder andere voor de NS een optimaliseringsmethode voor het ontwerpen van een dienstregeling heeft ontwikkeld, zegt: 'Ik houd van wiskundige problemen die je gemakkelijk kunt formuleren, maar die je juist heel moeilijk kunt oplossen. En bovendien moeten ze voor mij dicht tegen de praktijk aanliggen.'

Robbert Dijkgraaf (mathematisch fysicus) stelt dat de wiskunde een intuïtie levert voor hoe de natuur in elkaar zit: 'Voor mij is de wiskunde historisch gezien een goede leidraad gebleken bij de formulering van fysische theorieën. Het mag nooit het uitgangspunt zijn, maar het is wel een extra ingrediënt. Zo vinden we symmetrieën en symmetriebrekingen terug in de vaste stof fysica, de astrofysica en de fysica van de elementaire deeltjes. Symmetrieën zijn zulke goede principes omdat het algemene structuren zijn. Het is juist de wiskunde die dat soort structuren beschrijft. Het meest fascinerende feit van de wereld waarin we leven vind ik dat we zo'n sterke hint hebben dat mathematische structuren de grondslag van de natuur vormen.'

Marc Peletier (toegepast wiskundige) beschrijft hoe een probleem uit de industrie door de wiskundige in de eerste plaats wordt vereenvoudigd tot een verwant en relevant probleem.

Henk Barendregt (grondslagen wiskunde en informatica) legt uit wat de aantrekkingskracht is van de wiskunde om de wiskunde, de zuivere wiskunde: 'Het zit in de ervaring dat je met iets bezig bent dat ons mensen overstijgt. Het is absoluut geldig. Getallen en meetkundige vormen zijn weliswaar door mensen bedacht, maar ze hebben toch een universele geldigheid die boven ons uitstijgt.'

3. De stap van wiskundige activiteit naar wiskundeonderwijs

Voor nagenoeg alle schoolvakken in het avo is het helder dat de inhoud en de denkwijzen voor een groot deel worden ontleend aan de bijbehorende *wetenschappelijke discipline* en moet bijdragen aan de *algemene vorming* van de leerlingen. De wet op de onderbouw van het voortgezet onderwijs noemt drie zaken die het *algemeen vormend* onderwijs dient te ontwikkelen, namelijk:

- *Cultureel* kapitaal, essentieel voor levenslange en levensbrede persoonlijke ontplooiing en ontwikkeling;
- *Sociaal* kapitaal, essentieel voor actief burgerschap, integratie en sociale cohesie;
- *Menselijk* kapitaal met het oog op de inzetbaarheid op de arbeidsmarkt.

In schoolvakken als Nederlands, geschiedenis, aardrijkskunde, economie, de moderne vreemde talen gaat het altijd over de balans tussen deze algemeen vormende doelen en de wens om de essentiële aspecten van de discipline te onderwijzen. Denk aan het literatuuronderwijs, historisch inzicht, maatschappelijke verbanden etc. Bij de natuurwetenschappen draait het in de vernieuwing van die vakken steeds om de centrale *wetenschappelijke concepten* uit de discipline en om (experimenteel) het laten ervaren hoe natuurwetenschappers hun *kennis ontwikkelen*.

Alleen in de discussie over de inhoud van algemeen vormend wiskundeonderwijs gaat het bijna uitsluitend over de aansluiting op vervolgopleidingen in termen van leerstof, toetsbare vaardigheden en rijtjes opgaven die leerlingen zouden moeten kunnen maken. Tot verbazing van onze collega's van de andere vakken en disciplines. Een benadering die ons is opgedrongen door politieke hypes en ambtenaren die willen scoren en zich uitlaten over de vraag wat wiskunde is of in hun ogen (!) behoort te zijn. Dat zou net zo onvoorstelbaar moeten zijn als een politicus die de vernieuwingscommissie natuurkunde vertelt waarmee de fysica zich bezig moet houden. Door die eenzijdige probleemstelling raken de wiskundige activiteiten, zoals beschreven door de wiskundige onderzoekers, helemaal op de achtergrond. Evenals de algemeen vormende doelen van wiskundeonderwijs.

In het visiedocument van cTWO, 'Rijk aan betekenis' [4], is geprobeerd de spanning tussen wiskundige inhouden en wiskundige activiteiten als volgt in balans te brengen:

– **Kernconcepten** in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval.

– **Centrale denkactiviteiten** zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen.

Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende **vaardigheden** moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo/vwo lopen.

In recente Nederlandse publicaties wordt een vergelijkbaar onderscheid gemaakt in componenten van wiskundige bekwaamheid en doelen van wiskundeonderwijs. Zie bijvoorbeeld het Manifest van de NVvW.[5] Met enkele steekwoorden gekarakteriseerd bestaat de na te streven wiskundige competentie uit:

Weten dat: kennis van feiten en begrippen, reproduceren, technieken beheersen.
Weten hoe: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden.
Weten waarom: principes, abstracties, rijke schema's, argumenteren, overzicht.
Weten over weten: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak.
Houding: wiskunde leren is leuk, interessant, groei in kennis geeft voldoening, ik kan het.

4. Een geschiedenis van doelen en doelgroepen

Zoals het woord *doelgroepen* al impliceert moeten de doelen met de bijbehorende leerstof passen bij groepen leerlingen voor wie dat onderwijs is bestemd. Dat klinkt triviaal, maar tegen die triviale conditie is in ons Nederlandse wiskundeonderwijs heel vaak gezondigd. Hier volgen enkele sprekende voorbeelden.

Moderne wiskunde 1968

In 1968 werd het klassieke algebra- en meetkundeonderwijs van de hbs en de ulo voor een groot deel vervangen door de zogenaamde '*moderne wiskunde*'. Dat ging gepaard met een ongekend grootschalige herscholing van wiskundeleraren van die schooltypen. Wiskundeleraren werden meerdere keren een week lang uitgeroosterd in hun scholen om van wiskundigen 'moderne wiskunde' te leren met onderwerpen als verzamelingenleer, logica, groepentheorie, topologie, stochastiek, maattheorie, projectieve meetkunde, lineaire algebra, enzovoort. De nieuwe programma's voor de mavo en de onderbouw havo/vwo bevatten een overdaad aan formele notaties, logische symbolen en aanvankelijk ook een fors brok verzamelingenleer en veel theorie over relaties en functies met bijbehorende notaties.

Wereldwijd was het hoofdargument dat dit de topics waren die in de wiskunde, dus in de *wetenschappelijke discipline*, de basis vormen van het universitair onderwijs en onderzoek in de wiskunde. De hoop was dat door de aandacht voor dit aspect van het wiskundeonderwijs, dus voor het *Weten waarom*, de aankomende studenten in het hoger onderwijs beter op hun (wiskundige) studie zouden worden voorbereid.

Het hoeft geen betoog dat ook toen maar een heel klein deel van de leerlingenpopulatie in een vervolgstudie deze wiskunde zou tegenkomen. Leerlingen konden de zin van de onderwezen formele taal en inhouden niet inzien en hun houding ten aanzien van wiskunde werd sterk negatief beïnvloed. De grote groep werd inhoudelijk tekort gedaan omdat de voor hen nog wel relevante wiskunde niet gericht was op het gebruik in de technische vakken en andere gebieden, waar wiskunde op gebruikersniveau een rol speelde. De doelen in de categorie *Weten hoe*, met name het functioneel gebruiken, werden zelfs niet nagestreefd, tot frustratie van de docenten in vakken waar dat wel nuttig en nodig voor was geweest.

De wiskundevakken uit de bovenbouw van hbs en gymnasium werden vervangen door het nieuwe vak *wiskunde 1* van het vwo, waar een mooi analyseprogramma voor werd ontworpen. Een goed programma voor de echte B-leerlingen met een wiskundig correcte en precieze opbouw. Waarschijnlijk wel haalbaar voor dat type leerlingen en ook zinvol voor een vervolgstudie in de B-richting (***zie figuur 1***).

Voorbeeld 2 Wat is de afgeleide van de functie $f: x \to \sqrt{x}$?

Oplossing

Het domein van f is $[0, \to\rangle$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x+h)} - \sqrt{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x+h)} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{(x+h)} + \sqrt{x}}{\sqrt{(x+h)} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h \cdot \{\sqrt{(x+h)} + \sqrt{x}\}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{(x+h)} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

De afgeleide van f is dus de functie $f': x \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$. *Hoewel $0 \in D_f$ is de functie f niet differentieerbaar voor $x = 0$.*

We kunnen schrijven:

$\lim_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$, immers als we x positief en dicht genoeg bij nul kiezen wordt $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ zo groot als we willen.

figuur 1 Uit: Sigma 4-5 havo (Cohen et al., 1978)

Helaas was de doelgroep na de invoering van havo/vwo ineens een heel andere geworden; nagenoeg alle studierichtingen in de economische, sociale en medische studierichtingen eisten voor toelating het vak wiskunde 1. Met die gewijzigde doelgroep (landelijk een 70% van de gehele vwo-populatie) werd het voor de wiskundeleraren in die heterogene klassen onmogelijk om in de analyse van wiskunde-1 het bedoelde exacte niveau, *Weten waarom*, te halen. Voor het nieuwe onderdeel van wiskunde-1, de statistiek en kansrekening, gold dat niet en hier lag het accent wel degelijk bij de doelen in de categorie *Weten hoe*, terwijl de wiskundige inhoud ook relevant was voor de gehele doelgroep. Statistiek was en is buiten de exacte en technische studies het meest gebruikte gebied uit de wiskunde.
Naast wiskunde-1 werd in het vwo het vak wiskunde-2 (o.a. wat analytische meetkunde en lineaire algebra) aangeboden en dat werd facultatief gekozen door de echte B-leerlingen. Voor een vervolgstudie in de B-richtingen was de inhoud zeker relevant, terwijl het van de leraar afhing of het aspect van het *Weten waarom* serieus aan de orde kwam.

Ontwikkelingen in de bovenbouw havo/vwo

In de zeventiger jaren werd het steeds duidelijker dat voor het vak wiskunde-1 de doelen en inhouden niet pasten bij de doelgroep, terwijl nog steeds 30% van de vwo-leerlingen (terecht) de keuze voor dat vak niet aandurfde. Met de invoering van het vak wiskunde A werd een poging ondernomen om voor havo en vwo een nieuw vak te ontwikkelen voor de grote doelgroep van het vwo die niet een B-studie ambieerde. Veel nadruk kwam te liggen op het *Weten hoe* met nieuwe en relevante inhouden. Een geslaagde poging om de doelen op de doelgroep af te stemmen, terwijl nu voor de gehele havo/vwo populatie terecht de opname van een wiskundevak in het vakkenpakket verplicht werd. Voor het eerst een redelijk goede afstemming tussen de doelgroepen en de inhouden van het wiskundeprogramma.
Maar de politiek bedacht dat de aansluiting van havo/vwo naar het hoger onderwijs beter kon en moest. Weg met de pretpakketten, leve de profielen. In de profielen van de nieuwe Tweede fase havo/vwo was aanvankelijk wiskunde A het aangewezen wiskundevak voor CM-EM en wiskunde B voor NG-NT, een heldere samenhang tussen doelen en doelgroepen. Te mooi om lang te laten voortduren! De recente ingreep in de structuur van de tweede fase, waarbij wiskunde A ook een vak is geworden voor het NG-profiel, heeft de doelgroep voor dat vak helaas veel te heterogeen gemaakt, waardoor de koppeling tussen doelen en doelgroep problematisch is geworden. De bemoeienis van OCW met de inhoud van wiskunde A is een rechtstreeks gevolg van die verkeerde keuze. En in de natuurwetenschappelijke studierichtingen begint men zich al te beklagen over het ontbreken van statistiek en kansrekening in wiskunde B, omdat ook daar de concepten van de kansrekening en de data-analyse een steeds belangrijker plaats innemen. Wordt vervolgd.

De doelgroep 12-tot-16-jarigen

Tegelijk met de invoering van de basisvorming (1994) is voor de gehele brede populatie van 12-tot-16-jarigen een volledig nieuwe oriëntatie van de inhouden en doelen van wiskundeonderwijs tot stand gekomen. Het zwaartepunt is komen te liggen bij de doelen in de categorieën *Weten hoe* en *Houding*. Het is onweerlegbaar dat voor de grote subgroep van leerlingen in het vmbo (ongeveer 60% van de totale populatie) zowel de wiskundige inhoud als de oriëntatie op deze twee categorieën doelen veel beter haalbaar is en veel relevanter dan welk ouder wiskundeprogramma ook (***zie figuur 2a***, ***figuur 2b*** en ***figuur 2c***).
Een grote winst wat betreft de afstemming tussen doelen en doelgroep, omdat voor deze leerlingen het *functioneel gebruiken* van wiskunde centraal moet staan. En de scores van die leeftijdsgroep in internationaal vergelijkend onderzoek als TIMSS en PISA zijn nog steeds goed.
Na de invoering van de basisvorming was de diepgang van het programma en de schoolboeken voor de onderbouw havo/vwo onvoldoende, mede veroorzaakt door de politieke druk om een uniform onderwijsaanbod in vmbo en havo/vwo tot stand te brengen. De laatste jaren verschuift de aandacht in de schoolboeken naar meer verdiepende inhouden (bijvoorbeeld in de algebra) en naar doelen van andere categorieën dan die uit *Weten hoe*.
De Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs heeft in het rapport *Verkennen,*

4 Gegeven zijn de puntverzamelingen
$V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y = 6\}$
en $W = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 0\}$
a. Bepaal $V \cap W$ door berekening.
b. Geef de verzamelingen V en W in één rechthoekig assenstelsel XOY aan.
Voor elke reële waarde van m bestaat een puntverzameling
$U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = mx\}$
c. Voor welke waarde van m bevat $U \cap (V \cup W)$ precies één element?
d. Geef voor de onder *c* gevonden waarde van m de verzameling U in hetzelfde assenstelsel aan.

figuur 2a Uit: Centraal examen lbo-T 1973

4 De lengte van een zijde van een ruit is 10. De oppervlakte van de ruit is 40.
Voor de grootte α van een scherpe hoek van deze ruit geldt
A. $\alpha \leq 25°$
B. $25° < \alpha \leq 40°$
C. $40° < \alpha \leq 55°$
D. $55° < \alpha$

figuur 2b Uit: Centraal examen lbo-T 1974

Gegeven zijn de functies $f: x \rightarrow x^2$ en $g: x \rightarrow x^2 + 4x - 3$.
De grafiek van f wordt bij een translatie afgebeeld op de grafiek van g.
Welke translatie is dit?

a $\binom{-4}{3}$ c $\binom{-2}{1}$ e $\binom{2}{[illegible]}$

b $\binom{4}{3}$ d $\binom{2}{1}$ f $\binom{2}{[illegible]}$

figuur 2c Uit: Centraal examen mavo/lbo-C 1988

gebruiken, verdiepen [6] van de programmacommissie onderbouw voorstellen uitgewerkt om voor de onderbouw havo/vwo de doelen en leerinhouden beter af te stemmen op de doelgroep (zie *www.ctwo.nl*). Dat wordt nu ten behoeve van de invoering omgezet in een gedetailleerd trajectenboek. Een complicatie is dat voor de wiskundevakken in de bovenbouw in principe eenzelfde fundament aan kennis en vaardigheden in de onderbouw wordt gelegd. Met name in 3-havo is het lastig om voor iedereen eenzelfde programma vast te stellen, omdat wenselijke kennis en vaardigheden voor wiskunde B niet haalbaar zijn voor een groot deel van de 3-havo-populatie. Het bekende probleem in 3-havo van de afstemming van doelen en inhouden op een heterogene doelgroep, waar alleen via een zekere differentiatie, splitsing van een heterogene populatie, iets aan kan worden gedaan.

5. De relatie tussen wiskunde en de buitenwereld

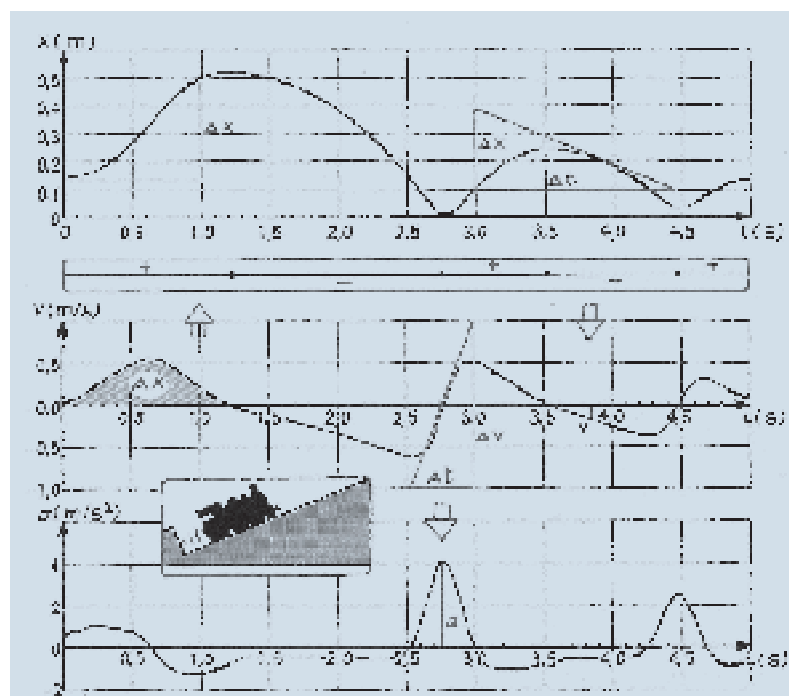
Waarom moet wiskunde een basisvak in elk algemeen vormend curriculum zijn? Over welke inhouden hebben we het eigenlijk? In de geschiedenis van het onderwijs in rekenen en wiskunde zijn daar verschillende antwoorden op gegeven. In Nederland hebben we al lang geleden ervoor gekozen om een zwaar accent te leggen bij het functioneren van de wiskundige kennis en vaardigheden buiten het vakgebied.
De schoonheid van het getalsysteem, de historische waarde van de meetkunde, de culturele waarde, het leren redeneren of denken, het bleek voor rekenen en wiskunde niet genoeg voor de bepaling van de inhouden. Het rekenen stond heel lang in functie van het cijferen, lange rijen berekeningen heel overzichtelijk en foutloos uitvoeren, want maatschappelijk was dat heel belangrijk.
Tegenwoordig ligt de nadruk veel meer bij het *functioneel gebruiken* van die kennis en routines in allerlei situaties. Die terechte keuze voor het leggen van een stevige verbinding met de buitenwereld lijkt evenwel te leiden tot een voor leerlingen redelijk chaotisch beeld van wat er in wiskunde aan de orde is. De strakke structuur van de meeste wiskundige deelgebieden heeft de charme van de eenvoud en het overzicht, maar bleek in het verleden in de hoofden van de meeste leerlingen tot een afgesloten systeem te leiden, waardoor de transfer naar toegepaste situaties slecht verliep. Te verwachten, want in het leerproces waren die situaties niet inbegrepen.

Op dit moment zien we een totaal door elkaar lopen van allerlei soorten opgaven, situaties, formele rekenregels, intuïtieve methoden enzovoort. We zitten in de onderwijspraktijk in het rekenonderwijs en het wiskundeonderwijs met schoolboeken en ander lesmateriaal waarin het zelfs voor leraren lastig is om de kernen en doorlopende leerlijnen op te sporen. Laat staan voor de leerlingen. Dat vraagt om een bezinning op de vraag hoe we de transfer kunnen bevorderen vanuit de wiskunde naar alle gebieden waar we het gebruik van die wiskunde willen optimaliseren. Met het oog op die vraag is het relevant om te kijken naar de zogenoemde context/concept-benadering in de discussie over de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde en natuurwetenschappen. Een moeilijkheid in de brede discussie over de relatie tussen concepten en contexten is dat de termen *concept* en *context* in biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde verschillend worden gebruikt, zodat het lastig is om een gemeenschappelijke lijn te vinden. Daarover meer in deel 4. Er is veel winst te behalen in een betere afstemming tussen de aanpak in de wiskundeles en bijvoorbeeld in de natuurkundeles (***zie figuur 3***).

6. Waar gaan we naar toe met die aansluiting?

Aan de hand van de vele drempels die ons Nederlands onderwijssysteem kent, bekijken we nu hoe het met de aansluiting is gesteld en waar we naar toe gaan.

Van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs
Het ministerie gaat overeenkomstig het rapport *Over de drempels met taal en rekenen* voor de overgang bo-vo binnenkort een tweetal referentieniveaus van kennis en vaardigheden voor rekenen vaststellen, namelijk het fundamentele niveau 1F en het streefniveau 1S (zie *Euclides 83*-8). In de beschrijving van de referentieniveaus is onderscheid gemaakt tussen begrippen en technieken die leerlingen *paraat* moeten hebben en het *functioneel gebruiken* van die kennis in eenvoudige toepassingssituaties. Op dit moment bereikt 75% van de basisschoolpopulatie niveau 1F en de ambitie is om dat percentage te laten toenemen tot 85%. Een fors deel van de leerlingen die instromen in het vmbo BB-KB, haalt dus nu het niveau 1F nog niet, terwijl dat (op den duur) wel het ingangsniveau moet worden. Het grootste deel van de basisschoolleerlingen (ruim 70%) stroomt binnen in vmbo-TL/GL, havo of vwo. Voor hen is het gewenste ingangsniveau 2S, dat zo is geformuleerd dat op dit moment 50% van de leerlingen dat haalt. De ambitie is dat dit percentage stijgt naar 65%. Het is duidelijk dat voor het bereiken van deze doelen een stevige inspanning in het basisonderwijs moet worden geleverd. Landelijk worden de ontwikkelingen in het basisonderwijs door peilingsonderzoek gevolgd. Regionaal en plaatselijk zijn er tal van initiatieven om in samenwerking tussen primair en voortgezet onderwijs aan deze streefdoelen te werken.



figuur 3 Grafische verbinding tussen wiskunde en natuurkunde; uit: Scoop, 1998

Van vmbo naar mbo
Voor leerlingen die 4-vmbo met een diploma verlaten is voor rekenen het referentieniveau 2F geformuleerd, een basis aan functioneel gebruiken van kennis en vaardigheden waar iedere burger in Nederland over zou moeten beschikken. In grote lijnen komt dat overeen met het rekendomein van het examenprogramma wiskunde BB-KB. Het overgrote deel van de leerlingen sluit het vmbo af met wiskunde als examenvak, zodat zij voldoen aan de kwaliteitseisen van 2F. Onderzocht wordt hoe de andere leerlingen hun rekenniveau door middel van een module bestaande uit dat rekendomein op het gewenste niveau kunnen brengen of onderhouden.

Van mbo naar hbo
Het mbo en het hbo zijn het er over eens dat leerlingen die een mbo-4 diploma behalen en daarmee toegang krijgen tot het hbo moeten beschikken over een stevig niveau aan kennis en vaardigheden op het gebied van het rekenen. Daarbij moeten zij over de competentie beschikken om die kennis en vaardigheden functioneel te kunnen gebruiken in relevante toepassings-situaties. Dat bedoelde referentieniveau is 3F en bouwt voort op 2F. Voor speciale groepen zoals afstuderenden in de technische sector of mbo-studenten die naar de pabo doorstromen, kunnen additionele vak-modules worden ontwikkeld. Leerlingen van het mbo die na mbo-2 de beroeps-praktijk ingaan, zullen op het mbo het referentieniveau 2F moeten onderhouden. Voor het mbo betekent dit een stevige ingreep in de curricula, omdat rekenen/wiskunde niet meer tot het gemeen-schappelijke curriculum hoorde.

Van 3-havo/vwo naar 4-havo/vwo
Voor de overgang van de onderbouw naar de bovenbouw havo/vwo is het referentieniveau 2S geformuleerd, maar de andere wiskunde-domeinen zijn natuurlijk ook van belang voor de aansluiting. In *Euclides 84*-3 is al geschetst wat de gewenste ontwikkeling in de onderbouw is om een betere aansluiting op de bovenbouw havo/vwo te verkrijgen. Het komende trajectenboek heeft tot doel een gelijktijdige afstemming te laten plaats vinden tussen veranderingen in de onderbouw en de nieuwe programma's voor de bovenbouw. Dat zou voor het eerst zijn sinds de 'moderne wiskunde' in 1968. De kans dat het lukt is niet nul.

Van 5-havo naar hbo
Binnen de structuur van de tweede fase lijkt de wiskunde B in de natuurprofielen goed aan te sluiten bij het relevante vervolgonderwijs, terwijl wiskunde A ook een voldoende basis voor het hbo in de verschillende maatschappelijke opleidingen biedt. De treurige uitzondering is dat als gevolg van het schrappen van het vak wiskunde A1 leerlingen vanaf de havo kunnen doorstromen naar de pabo zonder wiskunde in hun pakket. En dat terwijl nu op het mbo het 'rekengat' wordt gedempt. Het verdient voor deze leerlingen zonder wiskunde op examenniveau aanbeveling om een rekenmodule te bestuderen, bijvoorbeeld het rekendomein van het nieuwe programma wiskunde A.

Van 6-vwo naar wo
Bijna alle discussies in de pers en de politiek gaan over deze overgang. Een overgang die door politieke besluitvorming problematisch is gemaakt. Terwijl de betrokken wo-opleidingen steen en been klaagden over de geringe (wiskundige) kwaliteit van de instroom uit de tweede fase, schrapt de politiek honderden studielasturen in wiskunde B. Het is eenvoudig te voorspellen dat deze operatie de (wiskundige) kwaliteit van de instroom niet zal versterken. Daarnaast komt een deel van de leerlingen met een NG-profiel binnen met wiskunde A, waar de natuurwetenschappelijke en verwante studierichtingen niet blij mee zullen zijn. Een blik op de instroom van de economische en sociaalwetenschappelijke studierichtingen stemt tot nadenken. Een belangrijk deel van hun instroom is afkomstig uit het verwante hbo en heeft op het gebied van de analyse en de statistiek een niveau dat ver beneden het niveau van wiskunde A vwo ligt. Uit navraag bij het wo blijkt dat de meeste universiteiten geen verschil maken tussen de instroom uit het hbo en het vwo. Sterker nog, voor de toelating van hbo-ers tot een wo-masters, al dan niet via een schakelprogramma, worden alleen bij heel specifieke masters eisen gesteld aan het algemeen wiskundig niveau. En statistiek blijft het centrale wiskundevak in al die master- en bacheloropleidingen. (Over buitenring gesproken!) Toch klagen sommige eerstejaars docenten wiskunde vol overtuiging dat hun ellende te wijten is aan de lage kwaliteit van wiskunde A... Enige bewijsvoering over een causaal verband tussen zwakke studieresultaten van eerstejaars en de inhoud van wiskunde A ontbreekt. En voor toegang tot een masteropleiding is vwo-wiskunde A kennelijk niet meer nodig.

7. Tot slot
Het is hoopvol dat in alle sectoren van het onderwijs wordt gesproken over een versterking van de doorlopende leerlijnen. Het kan en moet beter! Hoe dan? Wat werkt wel en wat niet? Daarover meer in de laatste aflevering in deze reeks.

Verwijzingen

[1] Zie: *www.minocw.nl/documenten/4322.pdf* of *www.slo.nl*:
- Eindrapport Expertgroep: *Over de drempels met taal en rekenen*. SLO 2008.
- Deelrapport rekenen&wiskunde: *Over de drempels met rekenen.* SLO 2008.

[2] K. Devlin (1998): *Wiskunde / Wetenschap van patronen en structuren.* In: Natuur en Techniek. In het Nederlands vertaald door Jan van de Craats.

[3] B. Mols (2007): *Opgelost / Toepassingen van wiskunde en informatica.* Diemen: Veen Magazines.

[4] cTWO (2008): *Rijk aan betekenis.* Website: *www.ctwo.nl.*

[5] M. Bos, M. Kollenveld, W. Kuipers, A. van Streun (2004): *Manifest NVvW 'Wiskundedidactiek anno 2005'*. In: *Euclides 80*(3).

[6] cTWO (2008): *Verkennen, gebruiken, verdiepen*. Rapport programmacommissie onderbouw havo/vwo. Website: *www.ctwo.nl*.

Over de auteur

Anne van Streun was voorzitter van de werkgroep rekenen & wiskunde van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.
E-mailadres: *avstreun@euronet.nl*

Zinvol computer-gebruik bij wiskunde

[David Dijkman]

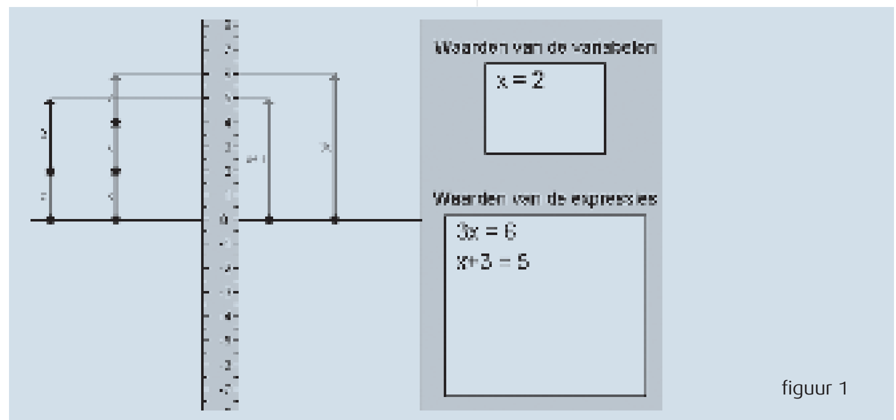
David Dijkman heeft veel ervaring met het gebruik van ICT in zijn lessen zowel op zijn oude school, het St. Michaël College te Zaandam, als op het Cygnus Gymnasium te Amsterdam. Hij heeft meegedaan met projecten als WELP en SAGE. Voor het ouderblad van het Cygnus Gymnasium schreef hij een overzichtsartikel over materiaal dat is ontwikkeld in diverse projecten zoals WisWeb, DITwis, DWO, SAGE en WELP, en over de wijze waarop dit ingepast kan worden in lessen. Het onderstaande artikel is een bewerking van dit stuk. David heeft een persoonlijke selectie gemaakt uit de grote hoeveelheid materiaal en informatie die nu voor handen is, en beschrijft de voor- en nadelen hiervan.

Wisplan

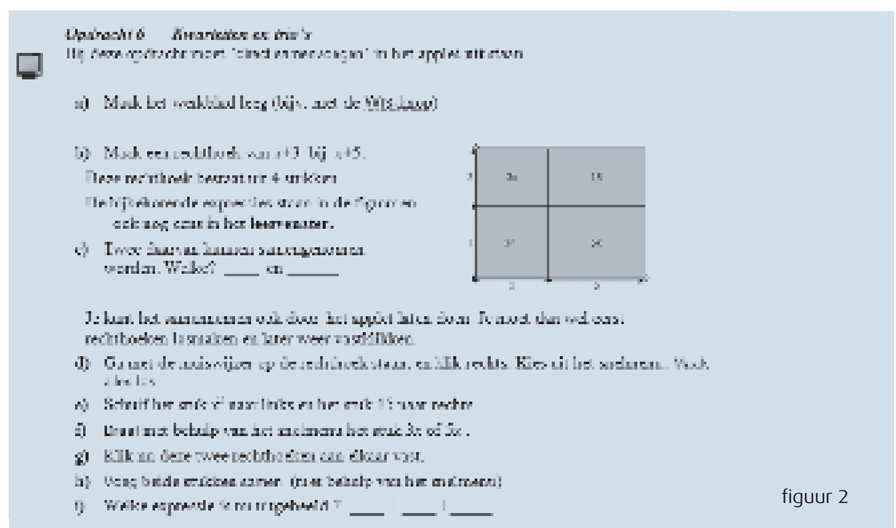
Op het Cygnus Gymnasium te Amsterdam is elk lokaal uitgerust met een smartboard en heeft iedere leerling de beschikking over een laptop met internetverbinding. Als wiskundedocent voelde ik me verplicht om ICT intensief te gebruiken tijdens de les. Voor de onderbouw wordt de methode *Getal en Ruimte* (ed. 2003) gebruikt. Bij elk leerjaar wordt een cd-rom meegeleverd met daarop gedigitaliseerd lesmateriaal dat een substantieel deel van het boek kan vervangen. De vormgeving ziet er fraai uit, leerlingen vinden het absoluut prettig om voor de afwisseling af en toe opgaven op de computer te doen, maar inhoudelijk vind ik de meerwaarde van het, van boek naar scherm, verplaatste materiaal achterblijven bij de mogelijkheden die op dit moment beschikbaar zijn. Het wat statische materiaal van *Getal en Ruimte* komt in editie 2003 vaak niet verder dan een meerkeuze vraag met een goed of fout reactie. In editie 2007 van *Getal en Ruimte* voor de bovenbouw is goed ingegaan op de behoefte om op internet digitaal materiaal beschikbaar te stellen dat geschikt is voor het elektronische schoolbord. Voor leerlingen is er de leerling-ICT en met een abonnement op de docentenkit kun je complete *studio's* downloaden met, indien geïnstalleerd, veel beeldmateriaal, uitwerkingen en (aanpasbare) Powerpointpresentaties, waarmee je je lessen absoluut levendiger kunt maken. Maar het blijft eenrichtingsverkeer, van docent naar leerling, terwijl de afgelopen tien jaar veel interactief (bedoeld als tweerichtingsverkeer) materiaal ontwikkeld, getest en goed bevonden is. Van dit interactieve materiaal wil ik in dit artikel enkele voorbeelden geven. Op *www.wisplan.nl* (mijn persoonlijke homepage) heb ik een overzicht gemaakt van extra digitaal materiaal dat ik gebruik bij de methode *Getal en Ruimte*. Hieronder volgt een toelichting.

De applets van WisWeb

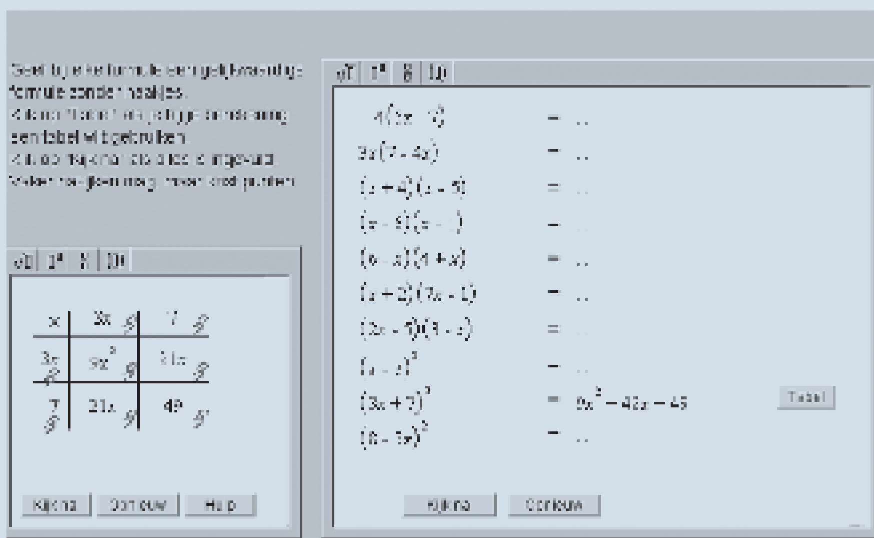
Tal van applets (internettoepassingen) die staan op *www.wisweb.nl* kun je direct gebruiken in de les. Er bestaan verschillende soorten applets: applets waarmee je vaardigheden kunt inslijpen, zoals vergelijkingen oplossen, herleiden, differentiëren, en applets die meer gericht zijn op het ondersteunen van de begripsvorming. Een mooi voorbeeld hiervan is Geometrische Algebra 1D, waarmee we in klas 1 aan de slag gaan. Met deze applet kun je bij uitdrukkingen als $x + 3$ en $3x$ een grafische voorstelling maken met behulp van pijlen (***zie figuur 1***).



figuur 1



figuur 2



figuur 3

Een pijl x verlengd met 3 ziet er heel anders uit dan een stapeling van drie pijlen ieder met lengte x. Omdat je de pijl x met behulp van het programma korter en langer kunt 'trekken', is voor leerlingen meteen duidelijk dat $x + 3$ en $3x$ geen gelijkwaardige expressies zijn (ze zijn slechts even lang bij $x = 1½$). Bij veel van de algebraopgaven uit het boek wordt louter een beroep gedaan op vormherkenning, terwijl leerlingen juist $3x$ en $x + 3$ veel op elkaar vinden lijken. Het inzicht verruimende Geometrische Algebra 1D lijkt dus een welkome aanvulling.
Met één dimensie meer kun je in Geometrische Algebra 2D haakjes wegwerken inzichtelijk ondersteunen met het oppervlaktemodel (***zie figuur 2***), en via de tabelaanpak (***zie figuur 3***) eventueel overstappen op de ouderwetse maar vertrouwde 'papegaaienmethode' (mag u zelf tekenen).
Bij veel applets moet wel extra lesmateriaal gemaakt worden. Leerlingen krijgen dat in de vorm van computerpractica aangeboden in Word-documenten, zowel op papier maar ook aanklikbaar via de planner (***figuur 2*** komt bijvoorbeeld uit een computerpracticum voor klas 2hv). Overigens zie je dat in de nieuwste edities van verschillende wiskundemethoden steeds meer gebruikt wordt gemaakt van de applets van WisWeb en dat bovendien het digitale materiaal steeds meer via internet wordt aangeboden. Alleen ontbreekt het vaak nog aan registratie van leerlingenwerk.

De DWO (Digitale Wiskunde Omgeving)

Juist bij de applets die bedoeld zijn om vaardigheden in te slijpen, wil je als docent graag zien wat en vooral hoe ze het gedaan hebben. Niet lang geleden vroeg ik leerlingen een printje of een schermfoto in te leveren als bewijs dat ze hun huiswerk gemaakt hadden, maar tegenwoordig is het mogelijk dat werk van leerlingen opgeslagen wordt in de DWO van het Freudenthal Instituut (FI). Het FI biedt (bij een WisWeb+ abonnement) een groot deel van de applets aan met op hun server opslagruimte voor leerlingenwerk. Docenten die inloggen, krijgen toegang tot scores van (alleen) hun eigen leerlingen en kunnen ook op detailniveau zien wat de leerlingen gedaan hebben (welke tussenstappen ze gemaakt hebben, waar ze vastgelopen zijn). Zodoende heb je bij wijze van spreken met één druk op de knop een huiswerkcontrole voor de hele klas. Vorig jaar heb ik geëxperimenteerd welk effect het geven van een cijfer voor werk op de DWO heeft. Conclusie is dat leerlingen absoluut hun werk beter, vollediger en eerder doen met cijferdruk, maar dat daardoor de opgaven uit het boek wel eens in de verdrukking komen. Een oplossing zou kunnen zijn het beter doseren en plannen van de leerstof, maar dat ondervind je pas na uitproberen. En pas na het opdoen van ervaringen, kun je adequaat je aanpak bijstellen.

De SAGE

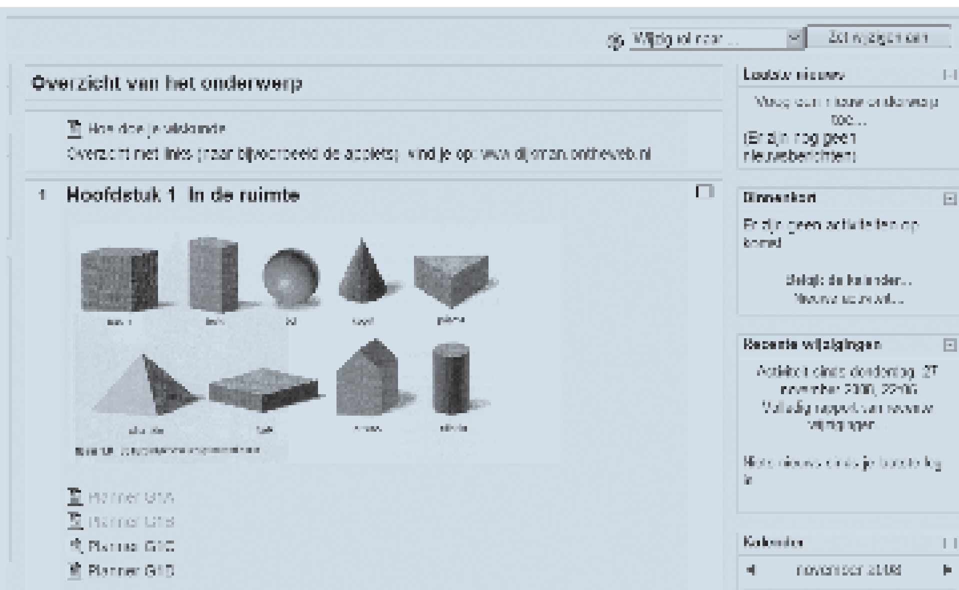
Vorig jaar heb ik meegedaan met het SAGE-project (*www.sageproject.nl*). Met de SAGE (Scorm Applet GEnerator) kon ik als deelnemer zonder kennis van programmeren zelf applets maken die voldoen aan de SCORM-standaard (SCORM is een soort wereldwijde afspraak/standaard waaraan digitale leerpakketjes moeten voldoen met het oog op uitwisselbaarheid). Een superapplet dus waarmee je zelf applets kunt maken! Op dit moment kan trouwens iedere docent met toegang tot de DWO eigen applets ontwerpen met de SAGE. De SAGE is namelijk binnen de DWO bereikbaar via de activiteit 'wiskunde opdracht'. Alleen ontbreekt binnen de DWO nog de mogelijkheid om de zelf gemaakte applets als SCORM te exporteren, om er vervolgens met één druk op de knop digitale leerpakketjes van te maken die opgenomen kunnen worden in de eigen ELO (elektronische leeromgeving). Dat kon binnen het SAGE-project wel. Het voordeel van registratie van leerlingenwerk binnen de eigen ELO is natuurlijk dat er niet nog een keer ergens anders hoeft ingelogd te worden en dat je niet afhankelijk bent van een derde partij. De DWO kan op een streng beveiligd netwerk soms erg traag zijn. Zeker bij klassikale uitleg verlies je makkelijk de aandacht en het geduld van leerlingen als je bij gebruik van het elektronische schoolbord weer enkele seconde moet wachten op het volgende scherm. Je beperken tot één digitale omgeving biedt dus het voordeel dat je slechts één keer hoeft in te loggen, slechts één keer hoeft op te starten. De studio's uit de docentenkit bij Getal en Ruimte geven hetzelfde probleem. Allemaal leuk die plaatjes bij de methode, maar voordat je ze met de beamer op je elektronische bord hebt geprojecteerd, ben je enkele seconden verder. Ik pleit dan ook voor één omgeving, het liefst met een studieplanner als basis, van waaruit al het digitale materiaal aanklikbaar is. Op het Cygnus staan die planners op de ELO (***zie figuren 4 en 5***). Op *www.sageproject.nl* staat een twintigtal applets die gratis beschikbaar zijn gesteld met als doel het project te promoten en de SAGE bredere bekendheid te geven. Na het bekijken van deze applets wordt ook duidelijk wat er op dit moment technisch mogelijk is met de SAGE. Achter de schermen wordt nu hard gewerkt aan een versie waarbij de docent zelf feedback kan ontwerpen.

DITwis

Parallel aan het SAGE-project ben ik voor wiskunde druk bezig geweest met het ontwikkelen van Digitale Interactieve Testjes (DITwis: een aanpasbaar javascript programma waarvan het geraamte geprogrammeerd is door Gerard Koolstra. In een DITwis blijven de vragen steeds hetzelfde, maar veranderen de getallen telkens wanneer je een vraag opnieuw doet. Leerlingen kunnen dus de opgaven trainen zo vaak als nodig is. Net zoals bij SAGE, is het mogelijk om van een DITwis een SCORM-pakketje te maken, waarbij het mogelijk wordt het werk van leerlingen op te slaan in de eigen ELO. Leerlingen kunnen dan verder waar ze gebleven waren en als docent kan ik per klas en per leerling zien hoe iedereen het gedaan heeft. Een

Les	Lesstof	Huiswerk	Toetsen, Deadlines
ma 25/08	stu doc	Lezen: Hoe doe je wiskunde? Naambordje maken met geo en passer. Probeer alle cirkels even 'dik' te maken.	Lei[illegible] controle!
do 28/08	1.1 A	1, 2, 3, 4, 5, 6 D	
vr 29/08	1.2 A 1.3 A	7, 8, 9, 10, 11, 12 13, 14, 15, 16 D	
ma 01/09	1.3 B C 1.4	17, 18, 22, 23 24, 25, 26 33, 34, 35, 36, 37, 38	
do 04/09	Webquest	Vlakken, ribben en hoekpunten van Platonische lichamen berekenen.	
vr 05/09	Webquest	Vlakken, ribben en hoekpunten van voetbal. Archimedisch lichaam [illegible]	
ma 08/09	Webquest	Inleveren Webquest via opdracht in Moodle	Opdracht
do 11/09	1.4 A	39, 40, 41, 42 Opdracht: Schaal Vierkant.	
vr 12/09	1.5 A D	44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56	
ma 15/09	1.6 D-toets	Maken: kennen, kunnen, begrippenlijst 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8	
do 18/09	Uitwerkingen D-toets	Leren: H1 + SchaalVierkant + Webquest.	Proefwerk

figuur 4



figuur 5

DE KOMKOMMERTEST (normale verdeling)

David

opg. 10

Van een partij komkommers, waarvan het gewicht normaal verdeeld is, weegt 7% onder de 240 gram en 22% boven de 442 gram.
Bepaal (de standaardafwijking en) het gemiddelde.
Rond (zo nodig) af op een heel getal.

Typ hieronder je antwoord

Dit is mijn antwoord

| Opg 1 | Opg 2 | Opg 3 | Opg 4 | Opg 5 | Opg 6 | Opg 7 | Opg 8 | Opg 9 | Opg 10 | Opg 11 | Opg 12 |

Overzicht

figuur 6

nog grotere meerwaarde van een DITwis is de ingebouwde feedback. Bekende fouten zijn meegeprogrammeerd zodat leerlingen slim commentaar krijgen als ze in een door de programmeur opzettelijk gegraven valkuil stappen. (Zie voor een artikel over ingebouwde feedback ook: 'Intelligente feedback bij digitale toetsen en oefeningen' door Bockhove, Heck en Koolstra in *Euclides* jaargang 81, nummer 2). Als leerlingen vastlopen, krijgen ze na enkele pogingen automatische een hint waarmee ze wellicht verder kunnen. Dit is natuurlijk heel wat anders dan een goed/fout reactie bij een meerkeuzevraag, waarbij je na enkele klikken vrij gemakkelijk het juiste antwoord cadeau krijgt, zonder daarvoor heel veel inspanning te hoeven leveren. Liever stimuleer ik met open vragen het onderzoekend leren, waarbij je na een vergissing eerst een hint krijgt in plaats van direct het juiste antwoord, waarbij je dus leert van je fouten, waarbij doorzettingsvermogen is vereist als je uiteindelijk een 100% score wilt, waarbij leerlingen aangezet worden tot samenwerkend leren om toch die ene lastige vraag te snappen. Een mooi voorbeeld hiervan is vraag 10 van de Komkommertest (***zie figuur 6***), bedoeld voor klas 5-vwo met twaalf vragen over de normale verdeling. De vragen moesten ze thuis voorbereiden en in de les voor een cijfer op de computer doen (dezelfde test dus, uiteraard wel met andere getallen). Later hoorde ik van een moeder hoe de leerlingen druk bezig geweest zijn met bellen, mailen, sms-en om die ene vraag te snappen waarover ik nog niets had uitgelegd.

De directe feedback bij DITwissen heeft net zoals bij de applets van WisWeb grote meerwaarde op de opgaven uit het boek (of de digitale variant daarvan). Natuurlijk moet je er wel voor waken dat leerlingen niet gaan 'overtrainen' (op de automatische piloot belanden), dat leerlingen andere opdrachten gaan verwaarlozen, en dat leerlingen hun antwoorden kritisch blijven controleren en niet afhankelijk worden van de feedback van de computer. Het laatste kan bewerkstelligd worden door bijvoorbeeld strafpunten te geven als ze meer pogingen nodig hebben, of door de feedback simpelweg uit te stellen of weg te laten (als bij een schriftelijke toets). Het is even uitvinden wat het beste werkt. Meestal ben ik tevreden, maar soms valt het resultaat wat tegen. Dat is echter niet anders dan bij het boek. Uitdaging blijft om leerlingen actief betrokken te houden bij de les en zowel de 'easy going'-leerlingen als de potentiële afhakers op de rails te houden.

Hoofdstuk 2 Getallen

	DITSWIS voorrang	**Instructie:** Maak iedere vraag van de toets meerdere keren, net zolang totdat je (met begrip) vrij vlot op alle varianten van de vraag het antwoord kunt vinden.	
	SAGE voorrang.	**Instructie:** Let bij deze oefening vooral op de tussenstappen	
	Breuken vermenigvuldigen	**Instructie:** Begrijpen hoe je breuken vermenigvuldigt.	
	Breuken optellen	**Instructie:** Begrijpen hoe je breuken optelt.	
	SAGE breuken.	**Instructie:** Let bij deze oefening vooral op de tussenstappen	
	Stroomdiagrammen	**Instructie:** Het computerpracticum dat hoort bij stroomdiagrammen vind je in het [illegible]	
	DITSWIS verhoudingen	**Instructie:** Maak iedere vraag van de toets meerdere keren, net zolang totdat je (met begrip) vrij vlot op alle varianten van de vraag het antwoord kunt vinden.	
	Flippo	**Instructie:** Probeer steeds 24 te maken. Maak handig gebruik van de voorrangsregels. Oplossingen.	

[illegible] Planner Docent

figuur 7

(*zie figuur 7*). Bij de introductie van formules en de behandeling van kwadratische verbanden is de aanpassing het grootst. Natuurlijk zullen er passages zijn die niet meteen lekker lopen. Dat vraagt om bijstelling, maar al met al ben ik best tevreden over het resultaat.

WELP (WisWeb En Lessen Praktijk)
Al die DITwissen, applets en computer-practica kun je natuurlijk niet bovenop het gewone programma plaatsen; je zult soms ook wat opgaven uit het boek moeten schrappen om de leerlingen niet te veel te belasten. Of sterker nog, je zult soms les-materiaal moeten herschrijven om het geheel lekker te laten lopen. In het WELP-project (*www.fi.uu.nl/wisweb/wiswebwelp/*) is enkele jaren geleden door het Freudenthal Instituut in samenwerking met verschillende scholen een nieuwe algebralijn ontwikkeld en getest: Algebra Anders. Vooral uit de variant van het St. Michaël College (zie *www.fi.uu.nl/wisweb/wiswebwelp/welpblokken*) heb ik veel materiaal geplukt, gearrangeerd, aangepast en opgenomen in een alternatief plan van aanpak op *www.wisplan.nl* voor de onderbouw bij de methode *Getal en Ruimte*

Tot slot
Ik begon dit verhaal met de titel ‘Zinvol computergebruik bij wiskunde’. Oordeel zelf en ga naar *www.wisplan.nl*. Ik hoop dat als u daar termen tegenkomt als DWO, DITwis, SAGE, SCORM of applets, u niet meteen afhaakt en terugverlangt naar die ‘papegaaienmethode’.

Over de auteur
David Dijkman is docent wiskunde aan het Keizer Karel College in Amstelveen en zeer actief op ICT-gebied. Uitdaging voor hem is om via Wisplan (*www.wisplan.nl*) meer collega’s enthousiast te maken voor digitale didactiek, in de hoop dat leerlingen er de vruchten van gaan plukken.
E-mailadres: *dpdykman@wisplan.nl*

APS-Exact



Ook in het voorjaar van 2009 organiseert APS-Exact diverse studiemiddagen

Woensdag 13 mei 2009	*Studiemiddag 'Rekenproblemen van "ik snap het niet" tot Dyscalculie'*
Maandag 18 mei 2009	*Studiemiddag 'Rekenen, de overgang van po naar vo'*
Woensdag 3 juni 2009	*Studiemiddag 'Rekenbeleid bij u op school'*

U kunt zich aanmelden via onze site www.aps.nl/exact > agenda
Bel of schrijf voor meer informatie:
APS-Exact
Postbus 85475
3508 AL UTRECHT
telefoon: 030 - 28 56 722
telefax: 030 - 28 56 777
e-mail: voortgezetonderwijs@aps.nl
www.aps.nl/exact



De exacte waarde van cos(π/17)

[Kees Jonkers]

Carl Friedrich Gauss (olieverfschilderij door C.A. Jensen, 1792-1870)

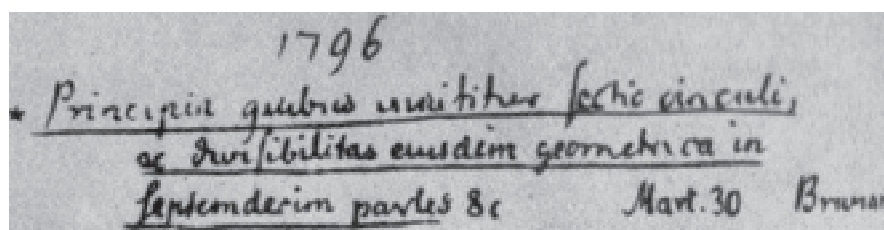
1. Inleiding

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), in de negentiende eeuw een beroemd wiskundige, is ook nu nog bekend vanwege de 'kromme van Gauss' die bij de normale verdeling uit de kansrekening optreedt.
Het onderzoek van Gauss strekte zich uit over een breed gebied. Niet alleen voor de wiskunde, maar ook op het gebied van de geodesie en de sterrenkunde bereikte hij belangrijke resultaten. Ook zijn natuurkundig onderzoek dat hij in latere jaren samen met zijn collega Wilhelm Weber (1804-1891) verrichtte, is van grote betekenis geweest. De getaltheorie heeft hij sterk vooruit geholpen door onder meer gebruik te maken van *complexe getallen*.
Een ander probleem waarmee Gauss zich al op zeer jeugdige leeftijd bezighield, was de vraag of het mogelijk is een constructie van de *regelmatige zeventienhoek* te geven.
In 1898 heeft een kleinzoon van Gauss een wetenschappelijk dagboek van zijn grootvader uit het familiebezit naar buiten gebracht. Volgens dit bijzondere handschrift heeft hij op 30 maart 1796, precies een maand vóór zijn negentiende verjaardag, het probleem van de zeventienhoek opgelost. We lezen op de eerste bladzijde van het dagboek (***zie figuur 1***):

1796
Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in Septemdecim partis
Mart. 30 Brunsvigae

In vertaling:
De principes waarop de verdeling van de cirkel berust en de geometrische deelbaarheid hiervan in zeventien delen. 30 maart [1796] Brunswick.

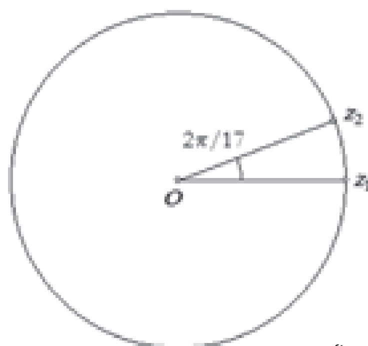
Sinds Euclides – dus zo'n tweeduizend jaar lang – dacht men dat regelmatige n-hoeken alleen dan construeerbaar waren als $n = 2^k \cdot 3^s \cdot 5^t$ (hierin is $k = 0, 1, 2, \ldots$ en zijn s en t gelijk aan 0 of 1).
Voor $n = 17$ zou de constructie dus niet mogelijk zijn, maar Gauss bewees het tegendeel. Hij vond deze ontdekking zo belangrijk dat hij er over publiceerde in de *Allgemeine Literatur-Zeitung* van april 1796 (Jena). Aan het eind van dit artikel schrijft hij:
'*Deze ontdekking verdient des te meer aandacht omdat behalve de bekende regelmatige veelhoeken er nog andere zijn, bijvoorbeeld de 17-hoek, die een meetkundige constructie toelaten. Deze ontdekking is alleen maar een bijzondere aanvulling op een meer omvattende theorie die nog niet af is, en die gepubliceerd zal worden zodra zij is afgerond. Carl Friedrich Gauss, wiskundestudent te Göttingen.*'
Enkele jaren later heeft Gauss het probleem van de construeerbaarheid van de regelmatige n-hoek algemeen opgelost. Hij bewees dat een regelmatige n-hoek (met n is priem) alleen dan met passer en liniaal te construeren is als het priemgetal n van de vorm $2^p + 1$ is met $p = 2^k$ (en $k = 0, 1, 2, \ldots$).
Nemen we $k = 3$, dan blijkt dat ook de regelmatige 257-hoek construeerbaar is.
Zijn bewijs maakt gebruik van complexe getallen en enkele begrippen uit de getaltheorie. Het is te vinden in zijn *Disquisitiones Arithmeticae*, een studie over getaltheorie die Gauss in 1801 publiceerde. Hierin heeft hij ook een formule opgenomen voor de exacte waarde van $\cos\frac{2\pi}{17}$ (***zie figuur 2***).
Hoe Gauss het bewijs in 1796 gevonden heeft, is niet met zekerheid vast te stellen. Het is goed mogelijk dat dit bewijs iets eenvoudiger is dan het in 1801 gepubliceerde. Gauss heeft namelijk vóór het verschijnen van zijn *Disquisitiones Arithmeticae* een kort manuscript naar de universiteit van St. Petersburg gestuurd met een bewijs voor de construeerbaarheid van de regelmatige 17-hoek.
Zoals bekend zijn de complexe getallen weer te geven als punten in het complexe vlak. De getallen $z_1 = 1$ en $z_2 = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$ liggen op de eenheidscirkel (***zie figuur 3***).
Hun afstand is gelijk aan de lengte van de zijde van de regelmatige 17-hoek.
Toen Gauss deze lengte kon construeren[1] – en dus ook berekenen – was ook de exacte waarde van $\cos\frac{2\pi}{17}$ berekenbaar. Hij had natuurlijk ook $\cos\frac{\pi}{17}$ kunnen berekenen;


1796
Principia quibus innititur sectio circuli,
ac divisibilitas eiusdem geometrica in
septemdecim partes &c Mart. 30 Brunsv.

figuur 1 De eerste regels uit het dagboek van Carl Friedrich Gauss

$$\cos\frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

figuur 2 Formule (in moderne notatie) door Gauss vermeld aan het eind van sectie VII van zijn Disquisitiones Arithmeticae



figuur 3

immers, uit de formule $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ volgt:
$\cos\frac{\pi}{17} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{17}}$.

In dit artikel leid ik een formule af voor de *exacte* waarde van $\cos\frac{\pi}{17}$. Daarbij wordt geen gebruik gemaakt van complexe getallen en ook niet van eigenschappen uit de getaltheorie.

2. Enkele goniometrische relaties

In het volgende maken we gebruik van de relatie:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{\sin 16x}{16\sin x}$$

Het bewijs van deze relatie berust op herhaalde toepassing van de bekende formule
$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$:
$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x} \quad \Rightarrow \quad \cos x \cdot \cos 2x = \frac{\sin 2x \cdot \cos 2x}{2\sin x} = \frac{\sin 4x}{4\sin x}$
En dan is: $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{\sin 4x \cdot \cos 4x}{4\sin x} = \frac{\sin 8x}{8\sin x}$, zodat inderdaad:
$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{\sin 8x \cdot \cos 8x}{8\sin x} = \frac{\sin 16x}{16\sin x}$

Deze relatie leidt tot goniometrische betrekkingen die te vinden zijn door voor x enkele speciale waarden in te vullen.

a. Neem $x = \frac{2}{15}n\pi$, waarin n een natuurlijk getal is. Dan:

$$\cos\tfrac{2}{15}n\pi \cdot \cos\tfrac{4}{15}n\pi \cdot \cos\tfrac{8}{15}n\pi \cdot \cos\tfrac{16}{15}n\pi = \frac{\sin\frac{32}{15}n\pi}{16\sin\frac{2}{15}n\pi}$$

Door gebruik te maken van de periodiciteit van de sinusfunctie geldt:
$\sin\frac{32}{15}n\pi = \sin(\frac{32}{15}n\pi - 2n\pi) = \sin\frac{2}{15}n\pi$
En dan is dus (voor n = 1, 2, …):
$\cos\frac{2}{15}n\pi \cdot \cos\frac{4}{15}n\pi \cdot \cos\frac{8}{15}n\pi \cdot \cos\frac{16}{15}n\pi = \frac{\sin\frac{2}{15}n\pi}{16\sin\frac{2}{15}n\pi} = \frac{1}{16}$

b. Neem $x = \frac{2k-1}{17}\pi$, waarin k een natuurlijk getal is. Dan:
$\cos\frac{1}{17}(2k-1)\pi \cdot \cos\frac{2}{17}(2k-1)\pi \cdot \cos\frac{4}{17}(2k-1)\pi \cdot \cos\frac{8}{17}(2k-1)\pi = \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin\frac{16}{17}(2k-1)\pi}{\sin\frac{1}{17}(2k-1)\pi}$
Voor de sinusfunctie geldt (voor alle α): $\sin\alpha = \sin((2k-1)\pi - \alpha)$. Neem $\alpha = \frac{16}{17}(2k-1)\pi$, dan is:
$\sin\frac{16}{17}(2k-1)\pi = \sin((2k-1)\pi - \frac{16}{17}(2k-1)\pi) = \sin\frac{1}{17}(2k-1)\pi$
We vinden dus (voor k = 1, 2, …):
$\cos\frac{1}{17}(2k-1)\pi \cdot \cos\frac{2}{17}(2k-1)\pi \cdot \cos\frac{4}{17}(2k-1)\pi \cdot \cos\frac{8}{17}(2k-1)\pi = \frac{1}{16}$

c. De laatste formule wordt nog twee maal toegepast.

c1. Neem k = 1. Dat geeft:
$\cos\frac{1}{17}\pi \cdot \cos\frac{2}{17}\pi \cdot \cos\frac{4}{17}\pi \cdot \cos\frac{8}{17}\pi = \frac{1}{16}$
Voor de cosinusfunctie geldt (voor alle α): $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$. Dit toegepast:
$\cos\frac{2}{17}\pi = -\cos\frac{15}{17}\pi, \quad \cos\frac{4}{17}\pi = -\cos\frac{13}{17}\pi, \quad \cos\frac{8}{17}\pi = -\cos\frac{9}{17}\pi$
We vinden:

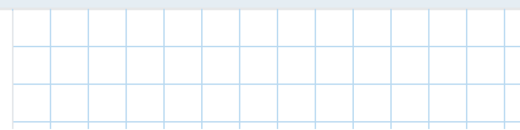
$$\boxed{\cos\tfrac{1}{17}\pi \cdot \cos\tfrac{9}{17}\pi \cdot \cos\tfrac{13}{17}\pi \cdot \cos\tfrac{15}{17}\pi = -\tfrac{1}{16}}$$

c2. Neem k = 2. Dat geeft:
$\cos\frac{3}{17}\pi \cdot \cos\frac{6}{17}\pi \cdot \cos\frac{12}{17}\pi \cdot \cos\frac{24}{17}\pi = \frac{1}{16}$
En wegens:
$\cos\frac{6}{17}\pi = -\cos\frac{11}{17}\pi, \quad \cos\frac{12}{17}\pi = -\cos\frac{5}{17}\pi, \quad \cos\frac{24}{17}\pi = -\cos\frac{7}{17}\pi$
hebben we:

$$\boxed{\cos\tfrac{3}{17}\pi \cdot \cos\tfrac{5}{17}\pi \cdot \cos\tfrac{7}{17}\pi \cdot \cos\tfrac{11}{17}\pi = -\tfrac{1}{16}}$$

3. De wortels van cos x·cos 2x·cos 4x·cos 8x = 1/16

We zagen in het voorgaande dat voor enkele waarden van x het product van de cosinussen steeds gelijk is aan $\frac{1}{16}$.
Het ligt daarom wel voor de hand om de vergelijking:
$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16}$
nader te bekijken. We zoeken de wortels van deze vergelijking voor $0 < x < \pi$.
De resultaten van paragraaf 2 geven ons al de volgende wortels:
$x_n = \frac{2n\pi}{15}$ met n = 1, 2, …, 7 en $x_k = \frac{(2k-1)\pi}{15}$ met k = 1, 2, …, 8.
De vergelijking heeft dus *minstens* 15 wortels.
Om *alle* wortels te vinden gebruiken we de substitutie $\cos x = \frac{1}{2}y$. Dan is:
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\cdot(\frac{1}{2}y)^2 - 1 = \frac{1}{2}y^2 - 1$
Herhaaldelijk toepassen geeft:
$\cos 4x = 2\cos^2(2x) - 1 = 2\cdot(\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 - 1 = \frac{1}{4}y^4 - 2y^2 + 1$
en:
$\cos 8x = 2\cos^2(4x) - 1 = 2\cdot(\frac{1}{2}y^4 - 2y^2 + 1)^2 - 1 = 2\cdot(\frac{1}{4}y^8 - 2y^6 + 5y^4 -$
$\quad = \frac{1}{2}y^8 - 4y^6 + 10y^4 - 8y^2 + 1$
We vinden dus:



$\frac{1}{2}y\cdot(\frac{1}{2}y^2-1)\cdot(\frac{1}{2}y^4-2y^2+1)\cdot(\frac{1}{2}y^8-4y^6+10y^4-8y^2+1)=\frac{1}{16}$
Herleiding geeft:
$y(y^2-2)(y^4-4y^2+2)(y^8-8y^6+20y^4-16y^2+2)=1$
Uitgewerkt en herleid op 0:
(*)… $y^{15}-14y^{13}+78y^{11}-220y^9+330y^7-252y^5+84y^3-8y-1=0$
We zien hieruit dat de vergelijking in y van de 15de graad is en dus *hoogstens* 15 wortels heeft. Aangezien door de substitutie $\cos x=\frac{1}{2}y$ aan elke x precies één waarde van y wordt toegevoegd, is dus bewezen dat ook de vergelijking:
$\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\frac{1}{16}$
hoogstens 15 wortels heeft. We hadden echter al 15 wortels gevonden! Dat zijn dus juist *alle* wortels van $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\frac{1}{16}$.
Het gevolg is dat nu ook alle wortels van de vergelijking (*) in y bekend zijn.
Wegens $y=2\cos x$ zijn deze wortels:
$y_n=2\cos\frac{2n\pi}{15}$ met n = 1, 2, …, 7 en $y_k=2\cos\frac{(2k-1)\pi}{17}$ met k = 1, 2, …, 8.

4. De vergelijking $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$

In het vervolg komt een vergelijking van de vierde graad voor. We geven daarom nu de methode van de Italiaan *Ferrari* (±1540) voor de oplossing van de vergelijking:
$x^4+ax^2+bx+c=0$
Ferrari kon deze vergelijking herleiden tot twee vierkantsvergelijkingen. Er moet daarbij ook nog een vergelijking van de derde graad worden opgelost.
Methode van Ferrari:
$x^4+ax^2+bx+c=0 \Rightarrow 4x^4+4ax^2=-4bx-4c \Rightarrow$
$4x^4+4ax^2+4\lambda x^2+(a+\lambda)^2=4\lambda x^2-4bx-4c+(a+\lambda)^2$
Hierin is λ een nog onbekende constante.
We gaan er nu voor zorgen dat er in het rechter lid van de laatste vergelijking een volkomen kwadraat komt te staan. Nu is:
$4\lambda x^2-4bx-4c+(a+\lambda)^2=4\lambda(x^2-\frac{b}{\lambda}x+\frac{b^2}{4\lambda^2})-\frac{b^2}{\lambda}-4c+(a+\lambda)^2$
Het volkomen kwadraat wordt dan bereikt als de laatste drie termen samen gelijk zijn aan 0:
$-\frac{b^2}{\lambda}-4c+(a+\lambda)^2=0 \Rightarrow -b^2-4c\lambda+a^2\lambda+2a\lambda^2+\lambda^3=0$
λ moet dus voldoen aan de vergelijking: $\lambda^3+2a\lambda^2+(a^2-4c)\lambda-b^2=0$.
Voor zo'n waarde van λ geldt dan:
$(2x^2+a+\lambda)^2-4\lambda(x-\frac{b}{2\lambda})^2=0 \Rightarrow 2x^2+a+\lambda=\pm2\sqrt{\lambda}\cdot(x-\frac{b}{2\lambda})$
De vergelijking $x^4+ax^2+bx+c=0$ is dan opgelost door de volgende twee vierkantsvergelijkingen op te lossen:
$2x^2+2\sqrt{\lambda}\cdot x-\frac{b}{\sqrt{\lambda}}+a+\lambda=0$ en $2x^2-2\sqrt{\lambda}\cdot x+\frac{b}{\sqrt{\lambda}}+a+\lambda=0$

5. Berekening van $\cos(\pi/17)$

Het polynoom (zie de vergelijking (*) in paragraaf 3):
$y^{15}-14y^{13}+78y^{11}-220y^9+330y^7-252y^5+84y^3-8y-1$
is te ontbinden als:
$(y+1)(y^2+y-1)(y^4-y^3-4y^2+4y+1)\cdot F$
waarbij $F=y^8-y^7-7y^6+6y^5+15y^4-10y^3-10y^2+4y+1$
Voor ons doel is alleen de factor F van belang. De andere factoren leiden tot de wortels van de vorm $y=2\cos\frac{2n\pi}{15}$ (met n = 1, 2, …,7) zoals eenvoudig te verifiëren is.
We gaan daarom verder met:
$F=y^8-y^7-7y^6+6y^5+15y^4-10y^3-10y^2+4y+1=0$
Stel nu $y=2Y$. Dan is:
$256Y^8-128Y^7-448Y^6+192Y^5+240Y^4-80Y^3-40Y^2+8Y+1=0$
De wortels van deze vergelijking zijn dus:
$Y_k=\frac{1}{2}y_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{17}$ (met k = 1, 2, …, 8)
Het Y-polynoom is 'irrationaal' ontbindbaar. Er komen dan twee vergelijkingen van de vierde graad:
(1)… $16Y^4+(-4+4\sqrt{17})Y^3-(6+2\sqrt{17})Y^2-(4+2\sqrt{17})Y-1=0$
(2)… $16Y^4-(4+4\sqrt{17})Y^3-(6-2\sqrt{17})Y^2-(4-2\sqrt{17})Y-1=0$
We moeten nog bepalen welke van de 8 wortels Y_k voldoen aan elk van deze vergelijkingen.
Voor (1) en (2) zal het product van de wortels gelijk zijn aan $-\frac{1}{16}$ zijn (ga dit na).
In paragraaf 2, onder c1 en c2, zagen we dat:
$\cos\frac{1}{17}\pi\cdot\cos\frac{9}{17}\pi\cdot\cos\frac{13}{17}\pi\cdot\cos\frac{15}{17}\pi=-\frac{1}{16}$ en $\cos\frac{3}{17}\pi\cdot\cos\frac{5}{17}\pi\cdot\cos\frac{7}{17}\pi\cdot\cos\frac{11}{17}\pi=-\frac{1}{16}$

$\cos\frac{1}{17}\pi$	$\cos\frac{9}{17}\pi$	$\cos\frac{13}{17}\pi$	$\cos\frac{15}{17}\pi$	$\cos\frac{3}{17}\pi$	$\cos\frac{5}{17}\pi$	$\cos\frac{7}{17}\pi$	$\cos\frac{11}{17}\pi$
+	−	−	−	+	+	+	−
Y_1	Y_5	Y_7	Y_8	Y_2	Y_3	Y_4	Y_6

(*Toelichting*. Onder de factoren staat het teken, plus of min, van de waarde van de factor.

Daaronder staat de wortel Y_k waarvan die factor de waarde is; hieronder zal blijken waarom.)
De som van de vier wortels van (2) is: $-(-\frac{4+4\sqrt{17}}{16}) = \frac{1}{4}(1+\sqrt{17}) > 1$.
Aangezien alle wortels kleiner dan 1 zijn, moet (2) dus minstens twee positieve wortels hebben.
Dit kan alleen als Y_2, Y_3, Y_4 en Y_6 de wortels van (2) zijn.
Conclusie: Y_1, Y_5, Y_7 en Y_8 zijn de wortels van (1).
We zoeken dus de enige *positieve* wortel $Y_1 = \cos\frac{1}{17}\pi$ van:

$$16Y^4+(-4+4\sqrt{17})Y^3-(6+2\sqrt{17})Y^2-(4+2\sqrt{17})Y-1=0$$

Dus de enige positieve wortel van:

$$Y^4+\tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{17})Y^3-\tfrac{1}{8}(3+\sqrt{17})Y^2-\tfrac{1}{8}(2+\sqrt{17})Y-1=0$$

We voeren vervolgens de substitutie $Y = z+\frac{1}{16}(1-\sqrt{17})$ uit. Dat geeft:

$$z^4-\tfrac{1}{64}(51+5\sqrt{17})z^2-\tfrac{1}{128}(17+7\sqrt{17})z+\tfrac{1}{8192}(561+119\sqrt{17})=0$$

We kunnen deze vergelijking in z oplossen met de methode van *Ferrari* uit paragraaf 4. De λ-vergelijking wordt in dit geval:

$$\lambda^3-\tfrac{1}{32}(51+5\sqrt{17})\lambda^2+\tfrac{1}{512}(323+53\sqrt{17})\lambda-\tfrac{1}{8192}(561+119\sqrt{17})=0$$

We lossen deze vergelijking op door de ontbinding:

$$\left(\lambda-\frac{17-\sqrt{17}}{32}\right)\left(\lambda^2-\tfrac{1}{16}(17+\sqrt{17})\lambda+\frac{85+19\sqrt{17}}{512}\right)=0$$

We vinden dus (als positieve wortel): $\lambda = \frac{17-\sqrt{17}}{32}$.
Met $p=\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ wordt dit: $\lambda = \frac{p^2}{64}$ of $\sqrt{\lambda} = \frac{p}{8}$.
De vierkantsvergelijkingen (zie het einde van paragraaf 4) worden:

$$2z^2+2\sqrt{\lambda}\cdot z-\frac{b}{\sqrt{\lambda}}+a+\lambda=0 \text{ en } 2z^2-2\sqrt{\lambda}\cdot z+\frac{b}{\sqrt{\lambda}}+a+\lambda=0$$

Hierin is: $a=-\frac{1}{64}(51+5\sqrt{17})$, $b=-\frac{1}{128}(17+7\sqrt{17})$, $\sqrt{\lambda}=\frac{p}{8}$

Door verdere berekeningen vinden we dan:

$$2z^2+\tfrac{1}{4}pz+\tfrac{1}{512}p(p-4)(p^2-40)=0 \text{ en } 2z^2-\tfrac{1}{4}pz+\tfrac{1}{512}p(p+4)(p^2-40)=0$$

Met $z=Y-\frac{1}{16}(1-\sqrt{17})$ krijgen we de volgende vergelijkingen in Y:

(3)… $32Y^2-2(p^2-2p-32)Y+\frac{1}{16}p^4-\frac{1}{4}p^3-\frac{13}{4}p^2+9p+32=0$

(4)… $32Y^2-2(p^2+2p-32)Y+\frac{1}{16}p^4+\frac{1}{4}p^3-\frac{13}{4}p^2-9p+32=0$

Alleen de laatste vergelijking (4) blijkt een positieve en een negatieve wortel te hebben.
We kiezen de positieve wortel en vinden met de bekende formule voor de wortels van een vierkantsvergelijking:

$$Y_1=\tfrac{1}{32}p^2+\tfrac{1}{16}p-1+\tfrac{1}{32}\sqrt{-p^4-4p^3+44p^2+160p}$$

Conclusie:

$$\cos\tfrac{\pi}{17}=\tfrac{1}{32}p^2+\tfrac{1}{16}p-1+\tfrac{1}{32}\sqrt{-p^4-4p^3+44p^2+160p} \text{ met } p=\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$

Door substitutie van p krijgen we tenslotte de gezochte formule:

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{17}=\frac{1}{16}\left(1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+(6+2\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\right)}$$

6. Slot: de exacte waarde van cos(π/15)

Uit het behandelde in paragraaf 5 is te concluderen dat $-2\cos\frac{\pi}{15}$ een wortel is van de vergelijking $y^4-y^3-4y^2+4y+1=0$.
Door verdere berekeningen kan hieruit de exacte waarde van $\cos\frac{\pi}{15}$ afgeleid worden.
Ik nodig u uit mij het antwoord toe te sturen.

Noot (red.)

[1] Zie het artikel 'De constructie van de regelmatige 17-hoek' van Dick Klingens op pagina 179 in dit nummer.

Over de auteur

Kees Jonkers was van 1963 tot 1997 leraar aan het Petrus Canisius College te Alkmaar.
E-mailadres: *cbjjonkers@planet.nl*

Mededeling / Wiskunde Scholen Prijs



Doe mee aan de Wiskunde Scholen Prijs! Stuur dat project in dat u al jaren doet en waar u toch wel veel tijd in heeft zitten, of dat project dat u net dit jaar gestart bent en waarvan u denkt dat dat voor meer scholen wel interessant zou kunnen zijn!
Uw school kan daarmee in aanmerking komen voor het winnen van de Wiskunde Scholen Prijs. Alle scholen voor voortgezet onderwijs kunnen, in drie categorieën (vmbo, onderbouw havo/vwo en bovenbouw havo/vwo), meedingen.

In iedere categorie is een prijs van 1000 euro te winnen. Vanaf januari 2009 kunt u uw project insturen (tot uiterlijk 31 maart 2009).
Meer informatie kunt u vinden op de website: *www.wiskundescholenprijs.nl*

Contactpersoon: Dédé de Haan
(e-mailadres: *scholenprijs@fi.uu.nl*)

De constructie van de regelmatige 17-hoek

BIJ 'DE EXACTE WAARDE VAN COS(π/17)'

[Dick Klingens]

Alle wortelvormen die voorkomen in de door Gauss gegeven waarde van $\cos\frac{2\pi}{17}$ ***(zie figuur 2)*** in het artikel van **Kees Jonkers**, pag. 175, kunnen met *passer en liniaal* geconstrueerd worden. We herschrijven allereerst:

$$16\cos\tfrac{2\pi}{17} = -1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

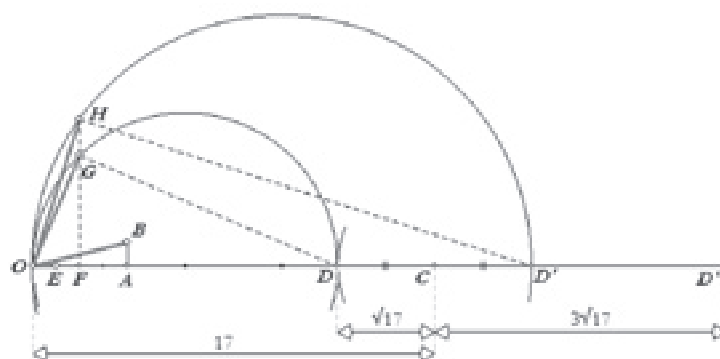
In figuur 1 is, uitgaande van $OE = AB = 1$ (met $OA = 4$ en F midden van OA), een constructie uitgevoerd voor de lijnstukken:

- $OB = \sqrt{17}$ (stelling van Pythagoras);
- $OG = \sqrt{34-2\sqrt{17}}$ (in de rechthoekige driehoek ODG is: $OG^2 = OF \cdot OD$, waarbij $OD = 17 - \sqrt{17}$);
- $OD'' = 17+3\sqrt{17}$;
- $OH = \sqrt{34+2\sqrt{17}}$ (in de rechthoekige driehoek $OD'H$ is: $OH^2 = OF \cdot OD'$).

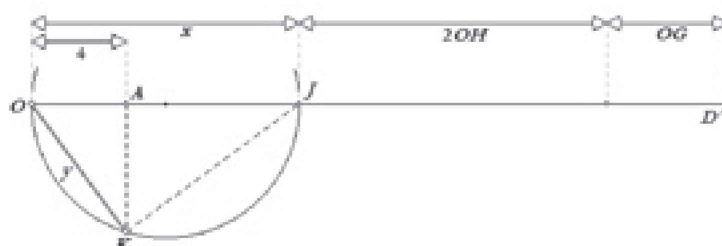
Stellen we nu voor de vierde term in de uitdrukking van $16\cos\frac{2\pi}{17}$:
$y = 2\sqrt{OD''-OG-2OH}$
dan is het lijnstuk met lengte y eveneens te construeren. Met:
$x = OD'' - OG - 2OH$
is namelijk:
$y = 2\sqrt{x}$ of $y^2 = 4x$

Het te construeren lijnstuk met lengte y (= OK) is dan middelevenredig tussen de lijnstukken met lengte 4 (= OA) en lengte x (= OJ); in de rechthoekige driehoek OKJ geldt immers $OK^2 = OA \cdot OJ$ (***zie figuur 2***).

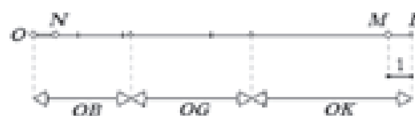
Met $OL = OB + OG + OK$ is dan:
$OM = OL - LM = OL - 1 = 16\cos\frac{2\pi}{17}$.
Met het lijnstuk $ON = \frac{1}{16}OM = \cos\frac{2\pi}{17}$ kunnen we de regelmatige 17-hoek construeren; ***zie figuur 4*** waarin $OP = 6$ en $ON' = 6 \cdot ON$.



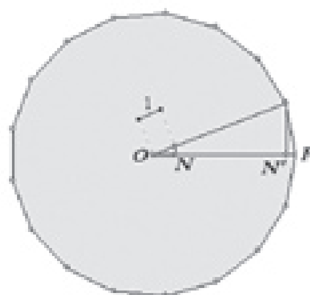
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

Over de auteur
Dick Klingens is werkzaam op het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is tevens eindredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *dklingens@pandd.nl*

Twee bewogen jaren

[Jan van de Craats]

Op 4 november 2008 stemde de VSNU, de Vereniging van Samenwerkende Nederlandse Universiteiten, op belangrijke punten in met de beslissingen van staatssecretaris Marja van Bijsterveldt-Vliegenthart omtrent de examenprogramma-voorstellen wiskunde van de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO, commissie Siersma). Vier maanden eerder had ook de HBO-raad zijn instemming betuigd. De staatssecretaris hoeft haar genomen besluiten niet ongedaan te maken of aan te passen. Daarmee kwam een einde aan een woelige periode van ruim twee jaar waarin naast de commissie Siersma ook de resonansgroep wiskunde een belangrijke rol speelde. Jan van de Craats, voorzitter van de resonansgroep, blikt terug.

Nieuwe profielen per 1 augustus 2007

Per 1 augustus 2007 zijn voor havo en vwo vernieuwde profielen in werking getreden. De eerste eindexamens volgens de nieuwe profielen zullen worden afgenomen in 2009 (havo) en 2010 (vwo). Het gaat hierbij om aanpassingen in de reeds bestaande profielen Cultuur en Maatschappij (C&M), Economie en Maatschappij (E&M), Natuur en Gezondheid (N&G) en Natuur en Techniek (N&T).Voor de wiskunde betekende dit een herschikking,waarbij er voor havo drie wiskundevakken ontstonden: wiskunde A, wiskunde B en wiskunde D, en voor vwo vier, namelijk wiskunde A, wiskunde B, wiskunde C en wiskunde D. De vakken wiskunde D zijn nieuw: het zijn keuzevakken die alleen naast wiskunde B kunnen worden gekozen. Ze zijn bedoeld als verdieping en verbreding; het vervolgonderwijs kan ze niet als ingangseis stellen. Wiskunde A is bestemd voor de profielen E&M en N&G, wiskunde B is bestemd voor N&T en wiskunde C voor C&M (alleen vwo). In de profielen E&M en N&G kan wiskunde B in plaats van wiskunde A worden gekozen. Wiskunde C kan in C&M vervangen worden door wiskunde A of wiskunde B.

De studentenactie *Lieve Maria*

Aan de totstandkoming van de nieuwe profielen ging een brede maatschappelijke en politieke discussie vooraf. Voor de wiskunde trok daarbij de studentenactie *Lieve Maria* van begin 2006 sterk de aandacht. Die actie, gericht tot de toenmalige minister van OCW Maria van der Hoeven, plaatste de al enige jaren sluimerende aansluitingsproblemen wiskunde bij de overgang van voortgezet onderwijs (havo/vwo) naar hoger onderwijs (hbo/wo) in het volle licht van de actualiteit. Het voornemen van de minister om in de nieuwe profielen de aantallen studielasturen wiskunde op havo en vwo te reduceren, was de directe aanleiding tot het studentenprotest. Niet *minder* uren wiskunde, maar juist *meer* uren waren er volgens de studenten nodig om de problemen die zij bij de wiskunde in het hoger onderwijs ondervonden, op te lossen.

Allengs bleek echter dat het niet zozeer ging om urenaantallen, als wel om de inhoud van de wiskunde op havo en vwo. Die sloot niet aan op de wensen en behoeften van het vervolgonderwijs. Deze aansluitingsproblematiek speelde dan ook de hoofdrol in de debatten in de Tweede Kamer over deze kwestie. Kamerleden twijfelden of er op havo en vwo wel voldoende aandacht was voor ‘inoefenen’, zij hadden aarzelingen bij de samenstelling van de commissie Siersma die voorstellen moest doen voor nieuwe examenprogramma’s wiskunde vanaf 2010, ze wezen op de bijspijkercursussen in het hoger onderwijs en het tekort aan aandacht voor basale en abstracte wiskunde, en ze hadden aarzelingen bij de rol van instellingen als Freudenthal Instituut (FI) en de Stichting Leerplanontwikkeling (SLO). De aarzeling kreeg vorm in een aantal moties, die met algemene stemmen werden aangenomen: 2005-2006, 30187, nr. 27 (Hamer en Balemans, betere aansluiting wiskunde B op bètastudies), nr. 28 (Hamer en Mosterd, nadere eisen in verband met gewenste aansluiting), nr. 30 (Kraneveld en Lambrechts, onderhouden van basale kennis) en tenslotte nr. 33 (Lambrechts c.s.). De laatste motie riep op een *resonansgroep* in te stellen die de voorstellen van de commissie Siersma zou beoordelen op hun relevantie voor de doorstroom. De resonansgroep zou moeten bestaan uit betrokkenen die, als docent of student in het hoger onderwijs, praktische ervaring hebben met de problematiek van de aansluiting tussen voortgezet onderwijs en hoger onderwijs op het gebied van de wiskunde. De minister zegde toe de moties te zullen uitvoeren.

Een ander gevolg van de kamerdebatten was dat de minister op aandringen van de kamer de voorgenomen reductie van de urenaantallen voor wiskunde grotendeels ongedaan maakte. Hieronder staan per profiel de urenaantallen in de oude situatie (vóór de profielwijzigingen) en de nieuwe situatie die per 1 augustus 2007 is ingegaan.

HAVO	oude situatie	uren	per 1 augustus 2007	uren
N&T	wiskunde B12	440	wiskunde B	360
			wiskunde D (profielkeuzevak)	320
N&G	wiskunde B1	320	wiskunde A (of B)	320/360
E&M	Wiskunde A12	280	wiskunde A (of B)	320/360
C&M	Wiskunde A1	160		

VWO	oude situatie	uren	per 1 augustus 2007	uren
N&T	wiskunde B12	760	wiskunde B	600
			wiskunde D (profielkeuzevak)	440
N&G	wiskunde B1	600	wiskunde A (of B)	520/600
E&M	wiskunde A12	600	wiskunde A (of B)	520/600
C&M	wiskunde A1	360	wiskunde C (of A of B)	480/520/600

Instelling en eerste activiteiten van de resonansgroep

Overeenkomstig de wens van de Tweede Kamer stelde minister Van der Hoeven per 1 augustus 2006 een resonansgroep wiskunde in voor de periode tot 1 december 2007. Naar verwachting zou de commissie Siersma namelijk in het voorjaar van 2007 met voorstellen voor vernieuwde wiskundeprogramma's komen. Tussentijds zou de resonansgroep al kunnen reageren op conceptvoorstellen zodat de commissie Siersma daarmee rekening zou kunnen houden, waarna in augustus 2007 experimenten zouden kunnen starten om de programmavoorstellen in een aantal scholen te beproeven. In 2010 zouden de vernieuwde en, indien nodig, nog bijgestelde programma's dan kunnen worden ingevoerd.

Samenstelling resonansgroep wiskunde:
Dr. Wim Caspers, docent/afdelingsleider aan een school voor voortgezet onderwijs en als vwo-docent wiskunde tevens ingeschakeld bij het wiskundeonderwijs aan de Technische Universiteit Delft;
Ir. Nan van Geloven, tot juli 2007 studente technische wiskunde aan de Technische Universiteit Delft;
Gonny Hauwert, studente wiskunde aan de Universiteit Leiden;
Drs. Marjolein van Haselen, docente wiskunde en statistiek in het hoger economisch onderwijs (Hogeschool INHolland), tevens deskundige op het gebied van de aansluiting vo-hbo;
Metha Kamminga, docente wiskunde in het hoger technisch onderwijs (Noordelijke Hogeschool Leeuwarden) en bestuurslid van de NVvW;
Prof.dr. Klaas Landsman, hoogleraar wiskunde aan de Radboud Universiteit Nijmegen;
Peter de Lange, student scheikunde aan de Universiteit Utrecht, eerder bestuurslid van het LAKS;
Drs. Jan Los, docent wiskunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam en leraar wiskunde aan een school voor voortgezet onderwijs;
Dr.ir. Frans Martens, docent serviceonderwijs wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven;
Drs. Herman ten Napel, docent wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam (Faculteit der Economische Wetenschappen en Econometrie);
Prof.dr. Jan van de Craats (voorzitter), hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit;
Drs. Kees Lagerwaard (secretaris), toetsdeskundige Cito, later opgevolgd door *drs. Johan Gademan*, onderwijskundig adviseur.

De resonansgroep kon onmiddellijk aan het werk, want op de valreep had de Tweede Kamer nog gevraagd of zij ook haar oordeel wilde geven over de per 1 augustus 2007 in te voeren bijgestelde wiskundeprogramma's in de vernieuwde profielen. In feite was dit een onmogelijke opdracht omdat die programma's al vrijwel vastlagen: de syllabi en de schoolboeken waren al grotendeels geschreven zodat de marges voor veranderingen minimaal waren. Toch kwam de resonansgroep reeds op 13 november 2006 met inhoudelijk commentaar, met als belangrijkste punten aanpassingsvoorstellen voor vwo wiskunde A en wiskunde B. De wijzigingsvoorstellen voor wiskunde A nam de minister in haar brief van 14 december 2006 aan de Tweede Kamer voor een belangrijk deel over; het voorstel van de resonansgroep om bij vwo B *Kansrekening en statistiek* weer in het programma terug te brengen en de *Voortgezette meetkunde* te schrappen haalde het niet. Bij vwo wiskunde A werd het onderdeel *Differentiaalrekening met toepassingen* weer integraal in het programma voor het centraal schriftelijk eindexamen opgenomen, inclusief alle rekenregels voor differentiëren. Daarmee wordt in de nieuwe situatie bij wiskunde A, net als bij wiskunde B, weer vrijwel honderd procent van de stof ook op het centraal examen geëxamineerd.

De voorstellen van de commissie Siersma

De voortgang binnen de commissie Siersma liep minder vlot dan verwacht. Pas op 3 september 2007 kwam zij met conceptexamenprogramma's, waardoor de verwachte invoeringstermijn naar 2011 of later verschoven werd. Er was in de tussentijd wel informeel overleg geweest met leden van de resonansgroep, en mede als gevolg hiervan kon de resonansgroep op 8 november melden dat zij in grote lijnen kon instemmen met de conceptprogramma's voor havo A, havo B en vwo B (de resonansgroep heeft zich niet uitgesproken over de voorstellen voor havo D en vwo D omdat die vakken in het vervolgonderwijs geen ingangseis mogen zijn). Tegen de voorstellen voor vwo A en vwo C had de resonansgroep echter ernstige bezwaren.
In het eindvoorstel dat de commissie Siersma op 11 januari 2008 aan staatssecretaris Marja van Bijsterveldt-Vliegenthart aanbood, was aan die bezwaren tegen vwo A en vwo C niet tegemoetgekomen. Ze bleven in het eindrapport van de resonansgroep van 4 februari 2008 dan ook onverminderd gehandhaafd, naast een aantal kleinere wijzigingsvoorstellen voor de andere wiskundevakken.

Aansluitingsproblemen bij vwo wiskunde A

Al jarenlang zijn er ernstige aansluitingsproblemen met wiskunde A (thans nog wiskunde A12) bij de universitaire opleidingen economie en bedrijfskunde, en al jarenlang proberen de docenten wiskunde en statistiek die aan die opleidingen verbonden zijn, hiervoor aandacht te vragen. Het gaat hierbij jaarlijks om vele duizenden eerstejaarsstudenten, dus een klein probleem is het niet. Voor de leden van de resonansgroep, die in meerderheid dachten dat de aansluitingsproblemen zich vooral voordeden bij de bètavakken, was het een *eye opener* om te zien dat de problemen bij wiskunde A minstens zo groot zijn, zo niet groter. In een brief aan de voorzitter van de programmacommissie wiskunde A, een subcommissie van de commissie Siersma, vatte drs. Herman ten Napel de problemen als volgt samen:
'Ongeveer 80 procent van de eerstejaarsinstroom bij de economische faculteiten heeft op het vwo het vak wiskunde A12 gevolgd. Steeds weer moeten we tot onze teleurstelling constateren dat deze studenten bepaalde basisvaardigheden van de wiskunde waar wij groot belang aan hechten onvoldoende beheersen. Het werken met breuken, wortels, haakjes en exponenten gaat aan de lopende band verkeerd. Zelfs de meest eenvoudige vergelijkingen en ongelijkheden kan men niet meer oplossen. De grafische rekenmachine wordt kwistig te pas en te onpas gehanteerd, maar welke belangrijke functies achter de knopjes 'sin' en 'log' schuilgaan weet men niet! ('Hoefden we niet te kennen.') Het kost ons steeds meer moeite de gestelde leerdoelen bij onze propedeutische wiskunde te behalen. De omvang en het eindniveau van dit vak hebben we de laatste jaren regelmatig naar

beneden toe moeten bijstellen, hetgeen natuurlijk de kwaliteit van de opleiding niet ten goede komt. En ondanks deze bijstelling moeten we toch telkens weer aan het eind van het eerste jaar zo'n 25 procent van de eerstejaars een bindend negatief studieadvies *verstrekken waarbij de gebrekkige wiskunde-voorkennis een belangrijke rol speelt.*'
Het mocht niet baten. Ook in het eindvoorstel van de commissie Siersma voor vwo A was er nog steeds onvoldoende aandacht voor het ontwikkelen van formulevaardigheden en kennis van elementaire functies zoals de goniometrische functies, de e-machtfunctie en de natuurlijke logaritme.
De resonansgroep nam de aansluitingsproblemen bij vwo A wél serieus, en keurde de voorstellen van de commissie Siersma op deze punten daarom af. Zij merkte op dat de genoemde onderwerpen niet alleen voor de economische en bedrijfskundige wetenschappen, maar ook voor de (bio) medische wetenschappen van essentieel belang zijn.Voor al deze vervolgopleidingen is wiskunde A of wiskunde B thans de ingangseis. Een grote meerderheid van de eerstejaarsstudenten zal met wiskunde A binnenkomen. Verplicht stellen van wiskunde B voor deze studierichtingen is geen optie. Bij de komst van de nieuwe profielen hebben onder andere de universitaire opleidingen in de economie, de bedrijfskunde en de medische wetenschappen namelijk aangegeven dat het profielvak wiskunde A toegankelijkheid moet garanderen voor deze opleidingen. Slechts voor econometrie wordt wiskunde B als vooropleidingseis gehanteerd.
Ook ten aanzien van de voorstellen in het domein Kansrekening en statistiek (domein E in het voorstel van de commissie Siersma) had de resonansgroep bezwaren. Zo merkte zij op dat zij geen prioriteit hechtte aan de behandeling op het vwo van de onderwerpen toetsen, schatten en regressie (onderdelen E6, E7, E8 in het voorstel). Veel meer hechtte zij eraan de leerlingen een degelijke basis te verschaffen in de basisvaardigheden op dit gebied (onderdelen E1 tot en met E5).

Het voorstel voor vwo wiskunde C

Wiskunde C richt zich op universitaire studies in onder andere de sociale wetenschappen, de juridische wetenschappen en de taalwetenschap. Ook voor deze studenten zijn algemene rekenvaardigheden en formulevaardigheden van belang. De commissie Siersma schreef in haar programmavoorstel echter: '*De nadruk ligt minder op het reproduceren van technieken en meer op de functie, de cultuurhistorische rol en de waarde* [*van de wiskunde*] *in onze maatschappij.*' De resonansgroep maakte bezwaar tegen deze benadering. Net als bij wiskunde A en wiskunde B dient het programma van wiskunde C volgens haar gericht te zijn op die wiskunde die voor de vervolgopleidingen relevant is. Een aanzienlijk deel van het programmavoorstel is echter niet op deze doorstroom gericht, maar algemeen cultureel of historisch van aard. Zulke onderwerpen zijn in de visie van de resonansgroep zeker geschikt als keuze-onderwerp, maar niet als vaste onderdelen van het programma.
De resonansgroep stelde voor deze onderwerpen uit het verplichte deel van het programma te verwijderen. In plaats daarvan stelde zij voor meer aandacht te besteden aan het ontwikkelen en bijhouden van algemene rekenvaardigheden en formulevaardigheden. Ten aanzien van het domein Kansrekening en statistiek verwees de resonansgroep naar haar opmerkingen hierover bij vwo A.

De besluiten van de staatssecretaris

Geconfronteerd met de voorstellen van de commissie Siersma, een reactie hierop van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de op enige punten, onder andere bij de vakken vwo A en vwo C, afwijzende reactie van de resonansgroep en een commentaar op deze reacties van de commissie Siersma zelf, moest de staatssecretaris knopen doorhakken. Zij maakte haar beslissingen hieromtrent op 8 april 2008 bekend. In een brief aan voorzitter Siersma van cTWO schreef zij onder meer: '[…] *gebleken* [*is*] *dat er op een aantal punten verschillen van mening zijn blijven bestaan. Ik heb een aantal beslissingen moeten nemen. Die vindt u, met een onderbouwing,in de bijlage bij deze brief. De beslissingen zijn het resultaat van een bestuurlijke afweging. Ik realiseer mij heel goed dat de meningen van de inhoudelijk deskundigen daarover zullen blijven verschillen.We moeten ons daarbij realiseren dat het niet gaat om definitieve examenprogramma's – er zijn niet voor niets pilots voorzien. De aangegeven beslissingen zullen moeten leiden tot aanpassingen in de voorgestelde teksten. Ik verzoek u daarvoor zorg te dragen, zodat kan worden gewerkt aan de syllabi voor het centraal examen en in augustus 2008 de pilotscholen beschikken over de tekst van de experimentele examenprogramma's.*'
De beslissingen van de staatssecretaris voor de vakken havo A, havo B en vwo B weken, zoals verwacht kon worden, slechts op detailpunten af van de voorstellen van de commissie Siersma. Met deze voorstellen had de resonansgroep ook al in grote lijnen ingestemd. Anders was het bij vwo A en vwo C, waar de staatssecretaris zich door de argumenten van de resonansgroep had laten overtuigen en dienovereenkomstige besluiten had genomen.
Met deze besluiten was formeel een eind gekomen aan de werkzaamheden van de resonansgroep, die dan ook op 15 april 2008 ophield te bestaan.

Commotie en steun

De besluiten van de staatssecretaris leidden tot commotie in kringen van leraren en wiskundedidactici. Anne van Streun, lid van de commissie Siersma, startte een petitie onder de titel *Stop Kaalslag Wiskundeonderwijs* waarin hij het deed voorkomen alsof deze besluiten de doodssteek zouden betekenen voor het wiskundeonderwijs. De tekst van de petitie was zodanig, dat oningewijden een vertekend beeld voorgeschoteld kregen van de inhoud en de draagwijdte van de besluiten van de staatssecretaris. De petitie, die de staatssecretaris opriep haar besluiten ongedaan te maken, werd ondersteund door een krantenadvertentie ondertekend door Anne van Streun, Marian Kollenveld (voorzitter NVvW, lid cTWO) en Jan van Maanen (hoogleraar-directeur FIsme).
Er waren echter ook instemmende reacties, zowel van individuele wiskundeleraren als van groepen universitaire docenten. De docenten wiskunde en statistiek aan alle faculteiten economie en bedrijfskunde van de Nederlandse universiteiten lieten weten blij te zijn met de beslissingen van de staatssecretaris, met name die over wiskunde A. Drs. Geert Jan Franx van de Vrije Universiteit meldde:
'*Dit is een zeer positieve ontwikkeling. Mijn studenten (zowel econometrie, als economie als bedrijfskunde) klagen regelmatig dat ze op het vwo veel te weinig serieuze wiskunde*

geleerd hebben, en dat ze geestelijk lui gemaakt zijn door de grafische rekenmachine. Ze formuleerden het letterlijk als volgt: "Wij beschouwen ons als de proefkonijnen van de mislukte onderwijsvernieuwingen." Ze zijn er echt boos over dat ze op het vwo zo weinig substantieels geleerd hebben.' Zijn collega drs. Kees van der Hoeven voegde daaraan toe: '*Voor eerstejaars studenten is het vaak ook een raadsel hoe het kon gebeuren dat zij op het vwo (binnen Wiskunde A12) niet of niet goed zijn voorbereid op hun universitaire studie economie of bedrijfswetenschappen, terwijl ze formeel gesproken aan alle toelatingseisen voldoen.*' Drs. Sytze Knypstra van de Rijksuniversiteit Groningen meldde aan Herman ten Napel: '*Bedankt voor je werk in de resonansgroep. Ik ben blij dat het ministerie jullie aanbevelingen voor een groot deel heeft overgenomen, met name bij vwo wiskunde A.*' Soortgelijke reacties kwamen van de andere universiteiten.

De staatssecretaris reageert

Op 13 juni reageerde de staatssecretaris in een brief aan de Tweede Kamer op de ontstane situatie. Daarin schreef zij onder meer:

'*De commissie Siersma, maar ook de leden van de verschillende subgroepen die door de commissie werden ingesteld met vertegenwoordigers van FI, SLO en leraren, hebben hun werk enthousiast gedaan. Ik heb er begrip voor dat zij teleurgesteld waren toen bleek dat de resultaten van de afgesproken toetsing door de resonansgroep niet eenduidig positief bleken te zijn. In de voorstellen komen vakonderdelen voor die voor de voorbereiding op hoger onderwijs niet relevant zijn. Anderzijds ontbreken onderdelen die daarvoor wel nodig zijn: basisvaardigheden op het gebied van algebra, analyse en goniometrie, aldus de resonansgroep.*

Op de achtergrond speelt een tegenstelling die kort kan worden samengevat als een meer didactische (het hoe) en een op de inhoud van het vak (het wat) gerichte benadering. In het didactische kamp bevinden zich FI, SLO, hoogleraren vakdidactiek, organen van de lerarenvereniging. De inhoudelijke benadering is overheersend in het hoger onderwijs, maar ook bij veel leraren.

Ik heb de commissie erop gewezen dat ik verantwoordelijk ben voor de inhoud, het wat: de commissie moet mij dus op dat punt voorstellen voorleggen en die hebben de status van een advies. […] *Het is uiteindelijk een politieke verantwoordelijkheid alle oordelen tegen elkaar af te wegen.*

[…] *Ik moet vaststellen dat er verdeeldheid is in de wiskundewereld. De voorstanders van de didactische benadering claimen dat zij als enige het onderwijsveld vertegenwoordigen, wat feitelijk onjuist is. Hun petitie onderstreept die verdeeldheid, want uit toegevoegde inhoudelijke commentaren blijkt dat veel ondertekenaars reageerden op de algemene bewoordingen van de tekst van de petitie. En die biedt niet-ingevoerde lezers geen zicht op de zaak. Inhoudelijk houdt het merendeel van de commentaren eerder steun voor mijn benadering in. De reacties die mijn departement bereiken van individuele leraren en andere betrokkenen steunen ook mijn besluit.*

[…] *Inmiddels is op hoog ambtelijk niveau gesproken met de drie betrokken partijen (commissie Siersma, resonansgroep, lerarenvereniging). Daarbij bleek dat zowel vertegenwoordigers van de didactische als de vakinhoudelijke stroming oprecht en sterk betrokken zijn bij de vernieuwingen van het wiskundeonderwijs. Omdat die commotie veroorzaakt, is afgesproken dat ik mijn besluit nog eens voor zou leggen aan het hoger onderwijs (VSNU en HBO-Raad). Dat wordt immers geconfronteerd met de manco's die aanleiding waren tot de discussie in de Kamer. Daarnaast is vastgesteld dat de pilots met het nieuwe programma niet per1augustus 2008 kunnen starten, maar een jaar later. Dat heeft als voordeel dat de ervaringen met het in 2007 ingevoerde programma kunnen worden meegenomen.*'

Het oordeel van de HBO-raad en de VSNU

Reeds op 26 juni deelde de HBO-raad de staatssecretaris mede dat hij achter haar besluiten staat: '[…] *Een en ander afwegende is er vanuit het hbo geen reden om te twijfelen aan het oordeel van de resonansgroep. Het hbo kan instemmen met het besluit van de staatssecretaris, gelet op de verschillende commentaren van resonansgroep en lerarenvereniging.*'

De VSNU deed langer over haar reactie. Zij beperkte zich tot een oordeel over de vakken vwo A en vwo C, precies ook de vakken waarover grote controverses waren blijven bestaan. Bij wiskunde A kwam de VSNU tot een instemmend oordeel. Zij consulteerde hiertoe de Onderwijscommissie Geneeskunde van het Disciplineoverlegorgaan Medische Wetenschappen. Die deelde mede dat zij instemt met het besluit, en voegde daar aan toe: '*De beslissing van de staatssecretaris houdt o.a. in dat een deel van de statistiek komt te vervallen ten gunste van een versteviging van "de kern en de eerste binnenring". Er zal meer tijd besteed worden aan goniometrische, logaritmische en exponentiële functies, hetgeen een meerwaarde heeft voor de vervolgstudie. De onderdelen van de statistiek die komen te vervallen in wiskunde A zullen sowieso in de vervolgstudie gerichter en diepgaander besproken worden.*

De studenten die binnenkomen met wiskunde B in hun pakket hebben geen kennis van kansrekening en statistiek, maar meer ervaring met de genoemde functies. Het besluit van de staatssecretaris heeft in ieder geval tot gevolg dat de instroom homogener qua kennis is.'

De VSNU zelf zei in haar reactie onder meer: '*wiskunde A is het profielvak voor wiskunde bij NG en EM. De universitaire opleidingen in de economische en medische sectoren hebben – indien mogelijk – geen extra wiskunde-vooropleidingseis gesteld voor de beide profielen. Bij de komst van de nieuwe profielen (2007) hebben deze opleidingen aangegeven dat het profiel NG met wiskunde A toegankelijkheid moet garanderen voor deze opleidingen.*' De VSNU concludeerde: '*Uw besluit* [*over vwo wiskunde A*] *vindt dus steun bij zowel de economische als de medische wetenschappen.*'

Over wiskunde C was de VSNU minder stellig. Zij vond het lastig een goede inschatting te geven wat doorstroomrelevant is voor wiskunde C: '*De universiteiten vinden maatschappelijke factoren, context, plezier houden in wiskunde als voorbereiding op statistiek in het hoger onderwijs etc. voor wiskunde C relevante doorstroomfactoren. Tegelijkertijd moet ook van CM-leerlingen verwacht worden dat zij de basisvaardigheden beheersen. Op beide punten is het op dit moment onvoldoende duidelijk wat het standpunt is van de verschillende universitaire opleidingen en ik stel daarom voor de tijd die u hebt ingeruimd voor de pilots ook te gebruiken voor nadere informatierondes over wiskunde C bij de juridische en sociale wetenschappen.*'

Hoe nu verder?

Per 1 september 2009 zullen pilotstudies worden uitgevoerd met de nieuwe programma's, die door cTWO zullen worden aangepast aan de besluiten van de

staatssecretaris. Op zijn vroegst in 2012 volgt dan een evaluatie van deze experimenten, waarna de nieuwe, en eventueel opnieuw bijgestelde programma's in 2013 in de vierde klassen van havo en vwo zouden kunnen worden ingevoerd. Er is dus nog een lange weg te gaan. Wel is te hopen dat de besluiten van de staatssecretaris ook consequenties zullen hebben voor de huidige schoolboeken en examenprogramma's. De lacunes bij vwo wiskunde A dienen zo snel mogelijk te worden gecorrigeerd, zodat wiskunde A een vak wordt waarmee ook de toekomstige studenten in de economische en (bio)medische wetenschappen weer goedbeslagen ten ijs komen.

Documenten op het internet

De in dit artikel genoemde brieven en documenten zijn te vinden op of via mijn homepage:

- *http://staff.science.uva.nl/~craats/resonansgroep.htm* en
- *http://staff.science.uva.nl/~craats/#beslissingen* .

Voor een schema van de profielen in havo en vwo met de bijbehorende studielasturenverdeling zie:

- *www.minocw.nl/documenten/schema_havo.pdf* en
- *www.minocw.nl/documenten/schema_vwo.pdf* .

Over de auteur

Prof.dr. Jan van de Craats is hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en aan de Open Universiteit.
E-mailadres: *J.vandeCraats@uva.nl*



Aankondiging / HKRWO Symposium XV - Top of Flop?

Symposium XV vindt plaats op **zaterdag 16 mei 2009** in de Domstad Hogeschool, Koningsbergerstraat 9 in Utrecht (een paar minuten lopen van CS).
Inloop en koffie vanaf 9:30 uur, start programma 10:15 uur, einde rond 15:30 uur.

Toelichting

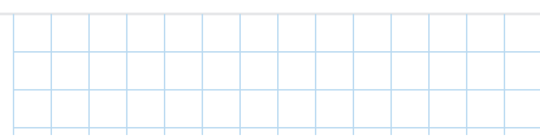
Het onderwijs in rekenen en wiskunde is geen statisch geheel. Inhouden en hele vakken komen op, blinken en verzinken. Soms komt een vak maar nauwelijks aan het blinken toe, soms kent het een langdurige bloeiperiode. Waarom komen sommige vakken nooit van de grond, wat maakt andere tot een succes en waarom verdwijnen vakken soms opeens? In symposium XV op 16 mei 2009 zullen we een paar voorbeelden bekijken.

Lezingen

- Willem Uittenbogaard: *Combinatoriek in het rekenonderwijs*
  In het Wiskobas-project is veel en mooi materiaal ontwikkeld voor een onderdeel 'Ordenend tellen'. Waarom is het vak, ondanks dat mooie materiaal en het aanvankelijke enthousiasme van veel docenten, toch nooit echt van de grond gekomen?
- Ed de Moor: *Geschiedenis van de wiskunde voor alpha's*
  Zo tussen 1950 en 1970 was geschiedenis van de wiskunde een vak dat een school kon kiezen als onderdeel van het eindexamen wiskunde voor gymnasium-α. Dat werd op ruime schaal gedaan. Kan zoiets binnen wiskunde C opnieuw lukken?
- David Baneke: *Mechanica op de HBS*
  Mechanica was lang een apart onderdeel van het hbs-programma, gegeven door wiskundigen. Natuurkundigen hadden veel kritiek op de manier waarop dat gedaan werd. Was mechanica op de hbs, door Freudenthal een *prulwetenschap* genoemd, een succesvak, of had het in deze vorm beter nooit kunnen bestaan?
- Michel Roelens: *Moderne Wiskunde in België*
  De modernisering van de schoolwiskunde in de jaren '60 was in België diepgaander dan in Nederland. Een bekende naam uit die tijd was die van G. Papy. Waarop berustte het aanvankelijke enthousiasme voor die aanpak, wat vonden de leerlingen ervan, hoe was het voor een docent om daarmee te werken en hoe liep het af?

Aanmelden en kosten

Aanmelding door het zenden van een e-mail aan Harm Jan Smid, e-mail: *h.j.smid@ipact.nl*, onder gelijktijdige overmaking van € 25,00 op girorekening 4657326, t.n.v. HKRWO Leiden. Inbegrepen zijn koffie, thee en fris, en een lunch.



Minder volume en meer inhoud

OVER INVESTEREN EN BEZUINIGEN
EEN REACTIE OP HET ARTIKEL IN EUCLIDES VAN DE VOORZITTER VAN ONZE VERENIGING

[Henk Pfaltzgraff]

Voorgeschiedenis

De laatste jaren is er veel op ons, wiskundeleraren, afgekomen. Elkaar opvolgende veranderingen in leerplannen en didactiek (ict!), verminderd aantal lesuren, doorstromingsproblemen en (het meest recent) maatschappelijke onvrede over de teruglopende reken- en wiskundige vaardigheden van de jonge mensen waarvoor wij ons verantwoordelijk voelen. Even leek het erop dat er een tweedeling in het veld is ontstaan. Zeker is het zo dat er over de oorzaken en gevolgen van al die ontwikkelingen diepgaande meningsverschillen zijn.

In *Euclides* van 8 december onder het kopje *Kunt u het nog volgen?* steekt Marian Kollenveld een hand uit. Ik citeer uit de aanhef: *De standpunten zijn minder ver uiteen dan in de hitte van de strijd lijkt. Iedereen wil namelijk hetzelfde: goed, zinvol en interessant onderwijs voor onze leerlingen* (p.m. Is ze *doorstroomrelevant onderwijs* met opzet vergeten?). Ik pak die uitgestoken hand, schudt hem en bekijk de door onze voorzitter gesuggereerde oplossingen voor het lesurentekort om te constateren dat 'ons' probleem volgens Marian eigenlijk geen oplossing heeft: *In vier jaar tijd is domweg niet een programma te realiseren zonder wezenlijk verlies, in de breedte en/of in de diepte. De discussie gaat nu over de breedte óf de diepte, in mijn visie kan dat nergens toe leiden omdat het volume niet meer toereikend is.* Aldus haar afsluitende conclusie. Het volume krimpt, maar het is de kunst om de inhoud te bewaren.

Teruglopend rendement

Ik heb wel een oplossing, met dezelfde uitgangspunten maar met iets meer nadruk op de aansluiting. In geen geval wil ik discussies opnieuw aanzwengelen en via een herhaling van zetten in eeuwig schaak terechtkomen. Er moet echt iets opgelost worden, via bezuinigen en investeren.

Wie mij probeert te volgen moet zich realiseren dat er veel leraren en leerlingen rondlopen die minder enthousiast zijn over de ontwikkelingen sinds de introductie van wiskunde A en dat juist uit die groep voorstellen komen voor een andere aanpak, omdat ze vinden dat de didactiek sinds die tijd medeoorzaak is van de achteruitgang. *Wiskunde A is bewezen al twintig jaar een succesformule*, roept onze voorzitter twee keer. Ik wil dat bewijs wel eens zien. Of gaat het hier niet om een bewijs maar om een geloof? Het geloof dat didactiek belangrijker is dan een leerplan? Het geloof dat je best een goede pianist kunt worden zonder te studeren op notenschrift en toonladders? Namens alle ongelovigen (leraren en leerlingen) moet ik toch eerst wat didactisch incorrecte opmerkingen kwijt. Er is namelijk veel verloren gegaan sinds 1990. Het rendement van ons reken- en wiskundeonderwijs is teruggelopen. Er gaat volgens ons, ongelovigen, niets boven een duidelijke, centrale uitleg door iemand die ver boven de stof staat. Duidelijkheid en systematische opbouw is de kracht van alle wiskunde. Voor het bord maar ook in het boek. Gevolgd door een gerichte training, met pen en papier in een schoolschrift. E-learning (al of niet *online*) verveelt gauw. Een systematische oplossingsmethode, aangereikt door de leraar (of het boek) heeft de voorkeur boven zelfontdekkend aanmodderen. Opdrachten met veel taal worden door de leerlingen verafschuwd.

De meeste leerlingen (zwak of sterk) werken liever met abstracties dan met concrete situaties. Leerlingen lossen veel liever (en veel sneller) vergelijkingen systematisch op dan via het infantiele *inklemmen*.

De rekenmachine hoort eigenlijk niet thuis in het curriculum.

Voorbeelden ter illustratie

Op een workshop over continue stochasten die ik vorig jaar aan de VU mocht geven aan eerstegraads leraren, kwamen in de introductie achtereenvolgens voor: partieel integreren, de arccosinus (afgeleide én primitieve), de substitutiemethode, het splitsen van een breuk en $\lim_{x \to 0} x^2 \ln x$. Later realiseerde ik me dat al deze items destijds in het programma wiskunde I behandeld werden. Hoe kregen we dat in 's hemelsnaam voor elkaar? Het waren toch echt geen wonderkinderen en superleraren in die tijd. Ook was het aantal lesuren niet veel groter dan in 2007.

Nog een voorbeeld. Ook op de havo, dertig jaar geleden (het pre-FI tijdperk) was er oefenstof genoeg te vinden in de schoolboeken. Na de theorie kwamen de rijtjessommen in opklimmende moeilijkheidsgraad, het automatiseren. Ik zei het al, het is didactisch vloeken in de kerk, maar het werkte wel. Denk niet, dat het leerplan simpel was. Het ontbinden en kwadraatsplitsen, scheve asymptoten, alle differentieerregels (inclusief de kettingregel dus), raaklijnen en uiterste waarden, de parabool als meetkundige plaats, goniometrie en vectorrekening (om hoeken en afstanden van lijnen en vlakken te berekenen). Meer dus dan het nieuwe leerplan vwo wiskunde B en in ongeveer evenveel lesuren (namelijk 4+3+3+4+4 = 18) aangeboden. En hoe zat het met de doorstroming van die havisten? Was er aansluiting met het vervolgonderwijs? Collega's van boven de veertig zullen zich herinneren hoeveel mensen destijds via de vorstelijke route mavo-havo-atheneum doorstroomden naar het hoger onderwijs. Het woord doorstroomrelevant moest nog worden uitgevonden.

Ongecijferdheid

In ‘Gecijferdheid in beeld’, een APS-uitgave van Kees Hoogland en Marja Meeder, wordt een definitie gegeven van gecijferdheid: *Gecijferdheid is het vermogen van een individu om zich zelfstandig en adequaat te redden in situaties waarin getallen, patronen en structuren een rol spelen. Mijn definitie ligt wat dichter bij de aarde. Gecijferdheid beschouw ik als het vermogen om gehele getallen en decimale getallen van meer dan twee cijfers en breuken zonder hulp van een rekenmachine te kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.*

Mijn vmbo-collega’s weten het: iemand met een diploma vmbo(T) en een hoog CE-cijfer voor wiskunde valt niet onder deze definitie. En evenmin een groot deel van de havisten (denk aan de pabo’s) en het vwo (de maatschappijprofielen). Inmiddels is onder onze verantwoording een generatie van ongecijferden opgegroeid. Ik schat dat er zo’n vier miljoen ongecijferden onder de 25 jaar rondlopen in Nederland. Jonge mensen die ernstig in hun toekomstmogelijkheden zijn gefrustreerd. En elk jaar komen er 200.000 jonge ongecijferden bij.

Er is crisis in het onderwijs. *Er is één ding dat we missen in de onderwijsdebatten*, aldus Marc Chavannes in de NRC (19 december 2008): *een gevoel van urgentie, een blijk van crisisbewustzijn. Ieder jaar dat het zo doorgaat, is er één te veel.* En zo is het.

Wij, wiskundeleraren, zullen er zelf iets op moeten vinden. Zonder te mopperen over het tekort aan volume. We moeten roeien met de beschikbare riemen. Anders gezegd: de efficiëntie moet omhoog. En dat kan best, mits we samenwerken met de uitgevers en het CEVO (uitvoerende instanties en de politiek zullen een cultuuromslag met gemak volgen, zoals recent bleek met de algebraïsering van de examens en zoals binnenkort zal blijken met de invoering van niet-realistische rekenmethodes in het basisonderwijs). Efficiënter wiskundeonderwijs dus. Via investeren (dat eerst) en bezuinigen. We hoeven in de breedte en in de diepte niets in te leveren, mits we snoeien in de wildgroei.

Investeren

Allereerst is een grondige bezinning op en herziening van het rekenfundament nodig. Het aantal ongecijferden moet drastisch, en op korte termijn, omlaag. Zonder deze hoofdvoorwaarde is elke aanpak tot mislukken gedoemd. Om dat te illustreren plaats ik hier het haast wanhopige verzoek dat Michiel van Saagsvelt onlangs richtte tot de deelnemers aan het WisBase-project van Bram Theune:

Op onze school, SG Nehalennia Middelburg, neemt het aantal leerlingen met een diploma vmbo-T op zak dat de overstap wil maken naar havo-4, toe. Voor díe leerlingen die in een natuurprofiel op havo in willen stromen en dan met name een pakket kiezen met wiskunde B, bieden we in de vierde klas van vmbo-T een ‘reparatiemodule’ wiskunde (B) aan. (...) *In de praktijk komt het neer op een dertigtal lessen waarna de leerlingen een toets moeten maken. Nu blijkt dat deze reparatiepoging in de meeste gevallen verre van voldoende is. Leerlingen lopen ondanks het behalen van de toets tegen onoverkomelijke problemen aan. Zonder uit te weiden over de mogelijke oorzaken hiervan kan ik me niet voorstellen dat wij de enige school zijn die hiermee te kampen heeft. Ik ben erg nieuwsgierig hoe op andere scholen met deze problematiek wordt omgesprongen en zie reacties graag tegemoet.*

Een schrijnende, maar onontkoombare conclusie dringt zich op: algebra is niet over te dragen aan ongecijferden. Eerst moet het rekenen bijgespijkerd worden. Die ervaring heb ik opgedaan op de vavo, waar ik mijn examenklas vwo wiskunde B1 (en B12) ieder jaar opstart met een introductiecursus rekenen+algebra van 20 slu om een klein jaar later te constateren dat de helft van mijn leerlingen (helaas ook nogal wat geslaagden) nog steeds slecht rekent. Voor het voortgezet onderwijs (inclusief het vmbo-T), in alle eerste klassen, is een cursus van minstens 30 lessen nodig om de rekenvaardigheden van de kinderen op peil te brengen. Daarna pas kan een reparatiemodule algebra en gonio angeboden worden.

Met die cursus brugklasrekenen zijn we er nog niet. In alle derde klassen (en de vierde klas vmbo-T) moet een vergelijkbaar programma algebra komen. Eerstegraads vergelijkingen en gebroken vergelijkingen. Wat rekenwerk in rechthoekige driehoeken (sinus, cosinus en tangens). De machtsregels. En voor het havo/vwo ook nog wat elementaire vergelijkingen met kwadraten en wortels. De rekenmachine en de context zullen in de tas moeten blijven. De uitgave van een boek (of boekjes) in die sfeer is een fluitje van een cent: de uitgevers stonden onlangs in de rij voor de uitgave van een niet-realistische rekenmethode. Met slechts twee auteurs, meer zijn er niet voor nodig. Ik herinner mij van een decennium geleden, dat Wim Groen vrijwel in zijn eentje beide bovenbouwdelen van Netwerk (havo wiskunde B) voor zijn rekening nam.

Bezuinigen

Veel kan geschrapt of verschoven worden zonder dat het vervolgonderwijs daar last van heeft. De volgende opsomming is verre van compleet, ik geef alleen een richting aan. Daar gaan we.

- De taligheid moet verdwijnen uit de boeken en examens: geen woorden maar daden dus.
- Contexten en toepassingen komen pas aan het eind, niet in het begin.
- Inderdaad, Marian. Alles wat niet doorstroomrelevant is moet eruit en dat zal soms zeer doen (De Euclidische meetkunde bijvoorbeeld. Een schitterend onderwerp. Maar, met alle waardering voor Dick Klingens en Ton Lecluse: na de hbs, in mijn studie natuur-, wis- en sterrenkunde en ook later, toen ik mij verdiepte in econometrische onderwerpen, ben ik nooit meer een koordenvierhoek of ingeschreven cirkel tegengekomen). Het inklemmen, dat mij met plaatsvervangende schaamte vervult als ik het zie, is ook zo’n misbaar onderwerp. En uit het nieuwe leerplan wiskunde A kunnen de discrete analyse (toenamen en rijen), de combinatoriek, het toetsen en het keuzeonderwerp zonder problemen geschrapt worden.
- Aangezien het voor de doorstroming onmisbare onderwerp kansrekening/statistiek uit het leerplan wiskunde B verdwenen is, zal daar in wiskunde D compensatie voor moeten komen. Hoe dan ook, deze blunder moet zo snel mogelijk hersteld worden, desnoods via wetgeving. De politiek zal meewerken, de tijd is rijp voor inhoudelijke (niet het volume, maar de inhoud!) en op de doorstroming gerichte veranderingen.
- De logische opbouw in de doorlopende lijn rekenen-algebra-trigonometrie-analyse-goniometrie moet terug. De analyse is al een paar eeuwen de basis van alle toegepaste wiskunde. Meer verlangt het hoger onderwijs niet (naast de statistiek voor de gammarichtingen).
- Zelfontdekkend en probleemgestuurd leren, het zijn mooie woorden, maar ze kosten bergen tijd en leveren niets op.

Goede uitleg is de enige didactiek die we nodig hebben.

- Terugdringen van alle tijdverslindende ict is een noodzakelijke voorwaarde. De grafische rekenmachine moet een stuk gereedschap zijn, een middel en geen doel. Geen *intersect* meer en geen inklemmen meer. De mediatheek, internet, Excel, compex examens: allemaal prima voor een school maar niet voor een wiskundeleerplan dat gebaseerd is op efficiëntie en abstractie.
- Het werken met projecten en modules werkt versnippering en dus tijdverlies in de hand. Daar moeten we dus mee ophouden (of het aan de wiskunde D overlaten, als dat tenminste geen doodgeboren kindje blijkt te zijn).

Bij tegenwind in Nederland gaan we gewoon harder trappen. (JPB, 20 december 2008).

Over de auteur
Henk Pfaltzgraff (69) was 30 jaar leraar en 20 jaar conrector aan het Zaanlands Lyceum. Sinds zijn (vervroegde) uittreding geeft hij nog les aan examenklassen van het volwassenenonderwijs. Hij was betrokken bij de oprichting van de stichting Goed Rekenonderwijs.
E-mailadres: *henk@henkshoekje.com*

Mededeling /
De internet-boekenveiling van het WereldWiskunde Fonds is weer gestart

Op 26 december 2008 is de internet-boekenveiling van het Wereldwiskunde Fonds (WwF) weer geopend. Deze veiling heet het WereldWiskundeWeb. U kunt daar bij opbod tweedehands wiskundeboeken kopen. De daarbij verkregen gelden komen geheel ten goede aan het WwF.
Het WwF financiert projecten in derde-wereldlanden die iets met het wiskunde-onderwijs aldaar van doen hebben. Het fonds valt onder de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De projecten worden betaald uit de donaties van vele leden van de NVvW en uit de opbrengst van de regelmatig georganiseerde internet-veiling. Er staan op dit moment 162 boeken in de veiling. Wellicht treft daar ook u iets van uw gading aan. De veiling is te bereiken via *www.nvvw.nl*, dan klikken op WwF & WWW (in het menu, links). U vindt daar ook meer informatie aan omtrent de veiling, de doelstellingen van het WwF en feitenvellen over door het WwF gefinancierde projecten.

Namens het WwF, Juliëtte Feitsma
(*juliettefeitsma@kpnplanet.nl*)

Uw leerlingen kunnen best wat hulp gebruiken
...U ook!
De wiskunde op onze site is uitermate geschikt voor het elektronisch schoolbord, voor thuisgebruik en voor maatwerk op papier. Kort gezegd: wiskunde voor de internetgeneratie.
***GRATIS!* praktische ondersteuning voor elke docent en leerling:**
• Theorie
• Uitleg
• Voorbeelden
• Applets
Noteer de url van onze site
www.math4all.nl
Kom eens langs en... vergeet de site niet aan uw leerlingen door te geven.
De site is ontwikkeld en wordt onderhouden door ervaren en deskundige liefhebbers van wiskunde.
Wij kunnen óók hulp gebruiken. Met een pilot, met geld, met support...
GRATIS! maar niet goedkoop
Math4all
www.dukohamminga.nl

Wiskunde in een leerwerktraject

WAT IS ER NODIG EN HOE BIED JE HET AAN?

[Mike Weijmans]

In 2002 is door het ministerie van onderwijs het zogenoemde leerwerktraject (LWT) in het leven geroepen om vroegtijdig schoolverlaten te beperken. Leerlingen die door beperkte theoretische kwaliteiten uit zouden vallen in het traditionele vmbo-bb-model, kunnen sindsdien een LWT volgen. In zo'n LWT wordt door het schrappen van algemene vakken zoals wiskunde, natuurkunde of Engels ruimte geschapen voor een meer praktisch programma.
Mike Weijmans heeft in het kader van het afronden van zijn tweedegraads wiskunde-studie onderzoek gedaan naar de consequenties van die keuze. Is het verstandig een algemeen vak als wiskunde zomaar te schrappen als de leerling in een technische opleiding zit? Zijn antwoord op die vraag is nee, maar hij ziet ook dat het traditionele onderwijsmodel niet aansluit bij de leerstijl van deze groep leerlingen.

Het leerwerktraject

Leerlingen die een LWT volgen, lopen twee dagen stage bij een leerbedrijf en gaan drie dagen naar school. De twee dagen stage zijn mogelijk omdat in een LWT-programma geen Engels, wis- en natuurkunde zijn opgenomen. De tijd die de leerlingen op school doorbrengen, wordt gevuld met vaktheorie, praktijk en Nederlands.
Een LWT kan gestart worden tijdens het 3e en 4e leerjaar. Leerlingen ontvangen na het afronden van hun traject een LWT-diploma. Hiermee stromen ze door naar een mbo-1 of mbo-2 opleiding waar ze hun startkwalificatie kunnen halen.
De wet op het voortgezet onderwijs schrijft voor dat een LWT ten minste Nederlands en een beroepsgericht programma moet omvatten. Verdere invulling van het LWT gebeurt in overleg met ouders, leerling en (een afgevaardigde van) de examen-commissie van de school. Daarbij kan gedacht worden aan een extra vak zoals bijvoorbeeld Engels of wiskunde, waarbij overlegd wordt met de vakdocent of de voorgestelde invulling voor de betreffende leerling een kans van slagen heeft.
De aanvullende vakken of modules worden niet meegenomen in de bepaling van de eindcijfers voor het diploma en vallen daardoor buiten de slaag/zakregeling. Op de achterzijde van het diploma kan een aantekening gemaakt worden over resultaten van de extra vakken of modules. Het is ook mogelijk om te werken met instellings-gebonden certificaten. In dat geval verdient het aanbeveling lokale partijen zoals uitstroomscholen en leerbedrijven te informeren over de inhoud hiervan.

Is er behoefte aan wiskunde binnen een leerwerktraject?

Hieronder volgt een aantal duidelijke aanwijzingen die aanleiding geven om de vraag bevestigend te beantwoorden.
– De bedrijven waar leerlingen stage lopen, verwachten dat de leerlingen basis-kennis hebben van rekenen en wiskunde. In mijn onderzoek heb ik mij beperkt tot bouwleerlingen. In die sector zou ook een LWT-leerling in staat moeten zijn om een willekeurig stuk hout in twee gelijke delen te zagen of in te schatten hoeveel stenen er op een klamp moeten staan, zodat de metselaar door kan werken.
– Voor leerlingen die na een LWT verder gaan met een mbo-1 of mbo-2 opleiding, is het sterk wennen als ze na twee jaar weer met rekenen en wiskunde te maken krijgen. ROC's geven aan dat dit een probleem is. De leerlingen krijgen een voorschakel-module aangeboden om zowel natuurkunde als wiskunde op het noodzakelijke niveau te krijgen. Om de voorschakelmodule goed door te kunnen werken is het nivo van eind vmbo-2 niet toereikend, en verder zouden de leerlingen niet zijn als ze in leerjaar 3 en 4 geen wiskunde krijgen aangeboden.
– In de monitor leerwerktraject *Boeiend en Bindend* van het ministerie van OC&W wordt gemeld dat 62% van de leerbedrijven vindt dat de kennis van de leerlingen beter kan. Daarnaast vindt 48% dat de theoreti-sche bagage beter kan.
– Wiskunde wordt op het vmbo gezien als een ondersteunend vak. Vaktheorie voor bouwkunde kan niet zonder wiskunde. De toepassingen van wiskunde in de bouw zijn zeer breed en divers. Denk naast standaard-bewerkingen als delen en vermenigvuldigen ook aan het bepalen van inhoud en opper-vlakte, coördinatenstelsels, het werken met eenheden en verhoudingen. Het zal duidelijk zijn dat ook in de vaktheorie behoefte is aan een wiskundige en rekenkundige basis.
– Naast alle omringende partijen zoals het bedrijfsleven, de ROC's en de vakdocenten van de afdeling bouw moet ook een wiskundesectie streven naar het aanbieden van wiskunde. Die zou als geen ander moeten weten waarom wiskunde zo belangrijk is.
Bij dit type leerlingen zijn de voorbeelden als het controleren van hun loonstrookje of hoe lang het duurt voordat ze een scooter of nieuwe computer kunnen kopen, een goede motivatie.

Leerstijlen van LWT leerlingen

Er is een duidelijke behoefte aan wiskunde-onderwijs in een LWT, maar we hebben hier wel te maken met een bijzonder type leerling waarbij regulier onderwijs niet werkt. LWT-leerlingen zijn zeer praktisch ingesteld; ze leren beter van praktische voorbeelden en situaties dan uit een boek. Dit is de reden dat de nadruk bij LWT ligt op de praktijk. Lesmateriaal moet aan-geboden worden volgens een realistisch

model. Leerlingen moeten snappen waarmee ze bezig zijn, en daarnaast moeten de voorbeelden reëel zijn. Denk bijvoorbeeld aan het aanmaken van een speciekuip met metselspecie (***zie figuur 1***) in plaats van een opdracht als 'hoeveel bekers water passen in een aquarium'. Beide opdrachten zijn qua niveau geschikt voor een LWT-leerling en dienen hetzelfde doel: het aanleren van standaard bewerkingen zoals delen en vermenigvuldigen. Een kuip met specie is echter realistischer voor een LWT-leerling dan een aquarium en bekers. En met een formule als *omtrek cirkel* = *diameter* × π kunnen ze beter uit de voeten dan met $O(cirkel) = \pi d$.
Maar ook bij de realistische voorbeelden houden leerlingen van afwisseling. Er wordt tegenwoordig wel gesproken over een 'zap-cultuur'. Als een taak geen interesse meer kan wekken, 'zappen' leerlingen verder naar de volgende taak. De taken onderling moeten dus voldoende afwisseling bieden om de aandacht vast te kunnen houden, zeker bij de LWT-leerlingen met hun korte spanningsboog. 'Crisscrossing Landscapes' als didactisch model sluit het beste aan bij deze zap-cultuur. Hierbij kunnen leerlingen zogezegd een landschap van opdrachten en lessen doorkruisen en oppikken wat ze nodig hebben. Een *reversed-learning* effect[1] wordt hiermee voorkomen. Leerlingen leren namelijk alleen nieuwe dingen. Leerlingen leren op deze manier volgens een constructivistisch model. Hieronder een beschrijving van zo'n *crisscrossing landscape*.

Het ontwerpen van een wiskundemodule

Het hoofddoel van lesmateriaal dat gebruikt wordt in een *crisscrossing landscape*, is dat de leerling er iets van leert dat hij later in de praktijk kan gebruiken. Het lesmateriaal moet aantrekkelijk zijn voor de leerling zodat het de aandacht trekt en vasthoudt. Digitaal lesmateriaal biedt hier veel mogelijkheden. Het ontwerpen ervan kan een tijdrovende klus zijn, maar het onderhoud is eenvoudig en je kunt snel inspelen op de actualiteit, bijvoorbeeld de praktijksituatie van een stagebedrijf. Zo kun je materiaal aan blijven bieden dat aansluit bij de belevingswereld van de leerling. Digitaal lesmateriaal kan worden aangeboden in een ELO (elektronische leeromgeving). Hierin kan namelijk aantrekkelijk en afwisselend lesmateriaal geplaatst worden. Daarnaast is het in de meeste ELO's mogelijk om de voortgang van de leerling te volgen. Een ander voordeel van een ELO is dat de leerling op diverse plaatsen kan werken aan zijn module: op school, op het stagebedrijf of thuis.
Een databaseprogramma of ELO heeft als toegevoegde functionaliteit dat antwoorden direct gecontroleerd kunnen worden. In het verlengde hiervan ligt dan ook de beoordeling van het gemaakte werk.
Het realistisch gehalte van het lesmateriaal wordt verhoogd door gebruik te maken van afbeeldingen en videofragmenten die dicht bij de praktijk staan. De leerlingen zijn inmiddels gewend aan 'You-Tube'-filmpjes. Deze zijn zelf te maken door dvd-materiaal om te zetten en vervolgens te implementeren in een ELO-les.

Onderwerpen voor een LWT wiskunde module

De inhoud van een LWT module kan het beste worden samengesteld in samenspraak met het ROC, het bedrijfsleven en de vakdocenten van de beroepsvakken. Op de school waar ik het onderzoek deed, is dat ook zo gebeurd. Dat heeft geleid tot een indeling van de module in vier hoofdstukken en een inleiding.

Onderwerpen van de modules wiskunde in LWT

Inleiding. Hoe werkt de wiskundemodule en wat wordt er van je verwacht? Waar kom je wiskunde tegen in de bouw? ***Zie figuur 2***.
Hoofdstuk 1 – Rekenen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, procenten, breuken en verhouding en schaal. ***Zie figuur 3*** en ***figuur 4***.
Hoofdstuk 2 – Vlakke meetkunde: assenstelsels (2D) (als ondersteuning bij technisch tekenen), figuren benoemen, omtrek, oppervlakte, (de in de bouw meest voorkomende) eenheden omzetten, hoeken, 3-4-5 steek (Pythagoras).
Hoofdstuk 3 – Ruimtemeetkunde: assenstelsels (3D) (als ondersteuning bij het instellen van bijvoorbeeld een freesmachine), figuren benoemen, aanzichten, doorsneden, inhoud, inhoudsmaten omzetten.
Hoofdstuk 4 – Statistiek: diagrammen aflezen (toepassen van bouwproducten, algemene ontwikkeling), gemiddelde berekenen.

De onderwerpen uit de paragrafen van de hoofdstukken worden op verschillende momenten getoetst. Leerlingen mogen per onderwerp twee maal een toets maken: bij aanvang en bij afsluiting het onderwerp. Wanneer leerlingen de toets bij aanvang met een voldoende afronden, hoeven ze niet meer te oefenen. Ze maken eventueel direct de tweede toets er achteraan en kunnen verder met het volgende onderwerp. Per drie onderwerpen wordt er een eindtoets gegeven en wordt getoetst of en in welke mate de leerling in staat is om grotere hoeveelheden kennis toe te passen. Oefeningen worden afwisselend op internet en in digitale formulieren gemaakt. Instructie wordt aangeboden in de vorm van instructievideo's, korte presentaties en uitgewerkte voorbeelden.

Sturing en begeleiding

Een ELO is niet voor iedere student geschikt. Er is een flinke portie zelfdiscipline nodig om zonder docent of begeleider leerstof door te ploegen. Een LWT-leerling is over het algemeen niet in staat om de module geheel zelfstandig door te werken. De leerling en coach kunnen communiceren via e-mail. Vaak is het echter beter om per week tijd in te roosteren om de stand van zaken en eventuele leerproblemen te bespreken. Zo'n moment kan ook gebruikt worden om toetsen af te nemen. Je wilt immers de kennis van de leerling toetsen en niet die van broer, zus of ouder.
Om leerlingen te stimuleren en voor te bereiden op de vervolgopleiding kan er gewerkt worden met een contract. De school, de leerling en de ouders dan weten precies wat er verwacht wordt. Eén van onze uitstroomscholen werkt met zo'n contract. Op die school wordt het een POP (persoonlijk ontwikkelingsplan) genoemd maar in feite komt het op hetzelfde neer. In een POP kan men bijvoorbeeld een planning, toetsdata, lesroosters, contactmomenten en spelregels op nemen. Zo geeft een POP op elk moment zicht op de stand van zaken.

In de praktijk

Ik heb in de praktijk gemerkt dat leerlingen enthousiast zijn over de wijze van aanbieden van de module. De plaatjes, films en praktische voorbeelden motiveren om er mee te werken. Bovendien spreekt het werken met een computer op zich al aan.

De vrijheid die ze hebben bij het werken met de wiskundemodule, wordt als zeer positief ervaren.
Leerlingen moeten echter gestimuleerd worden om er mee te werken. Mijn ervaring is dat leerlingen zelf geen initiatief nemen. Wanneer de module het af laat weten doordat het computerprogramma niet werkt, raken de leerlingen snel de motivatie kwijt. Het kost dan enige moeite om ze weer aan het werk te krijgen.
LWT-leerlingen hebben ook recht op wiskunde. Aan ons de taak ook voor hen ons onderwijs uitdagend en onderhoudend aan te bieden.

'Ik hoor en ik vergeet, ik zie en ik onthoud, ik doe en ik begrijp' (Confucius)**.**

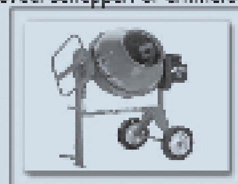
Dit gezegde past precies bij het leren van LWT-leerlingen: ze begrijpen het pas als ze het doen.

Met dank aan het Reynaertcollege in Hulst voor het geven van de ruimte om onderzoek te doen.

Rekenen met verhoudingen



In de praktijk kun je door te schatten, bepalen hoeveel scheppen of emmers zand je nodig hebt voor een mengsel.



Bij een verhouding zand : mortel : toeslag is als 1 : 3 : 2 ga je als volgt te werk:

1. 1 schep zand
2. 3 scheppen mortel
3. 2 scheppen toeslag

Als je ziet dat er nog meer bij kan herhaal je deze volgorde nog een keer. Net zolang tot je voldoende hebt.

In sommige gevallen is het handiger om vooraf te weten hoeveel je van alle materialen nodig hebt.
Zo kun je bijvoorbeeld bepalen of er genoeg balen cement liggen.

We nemen dezelfde verhouding: zand : mortel : toeslag is als 1 : 3 : 2.

In totaal bestaat je mengsel eigenlijk uit 6 delen: 1+3+2.

Wanneer je 80l van het mengsel wilt maken kun je met breuken berekenen hoeveel je van elk nodig hebt:

- zand : 1/6 van 80 --> 1 : 6 x 80 = 13,3l zand
- mortel : 3/6 van 80 --> 3 : 6 x 80 = 40l mortel
- toeslag: 2/6 van 80 --> 2 : 6 x 80 = 26,7l toeslag

figuur 1



Oefening 1 - Zoek de paren

Bij deze oefening is het de bedoeling dat je deelsommen gaat oefenen.
Deze eerste opdracht is een opfrisoefening.
Klik op een deelsom en daarna op het antwoord dat er bij hoort.
Je maakt de deelsommen zoveel mogelijk uit je hoofd.
Als je antwoord goed is, worden de som en het antwoord afgeplakt.

Matching

Door op [Start over] te klikken kun je overnieuw beginnen.
Doe deze oefening een stuk of drie keer.
Klik [Hier] om te starten.
Succes!

figuur 2 Opfrisoefening

Sven wil op de bouw een bouwhaak maken. Hij gebruikt daarvoor de 3-4-5 steek.



De lengte van de '3' zijde berekent hij met:

3 x 150cm = 450cm

Hoe lang is de '5' zijde?

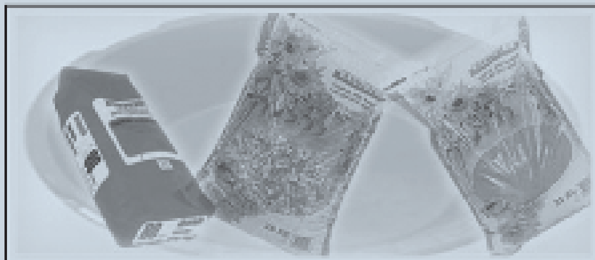
- 75
- 600
- 750
- 90
- 4500

figuur 3 Rekenen aan een bouwhaak

Niels gaat bertonmortel maken.

De samenstelling is:

- 17 % cement
- 34 % zand
- 49 % grind



Als niels een speciekuip vol met betonmortel wil maken hoeveel liter heeft hij dan van elk bestanddeel nodig? De speciekuip heeft een inhoud van 90 liter.

Zand = ??? (??? / 15.3 L / 30.6 L / 44.1 L)

Cement =

Grind =

figuur 4 Rekenen met procenten

---

1. Een muur van 5m² moet betegeld worden.
   Per vierkante meter gaan er 50 tegels op.
   Hoeveel tegels heb je nodig?
   Vul hier je berekening en je antwoord in.



2. Er moet een tuinmuur van 15m² gemetseld worden. Er worden maasformaat bakstenen gebruikt. Per vierkante meter heb je er ongeveer 48 nodig. (In de praktijk neem je 50 omdat dat makkelijk rekent)
   Hoeveel bakstenen heb je nodig?
   Vul hier je berekening en je antwoord in.

3. Voor een tussenwand worden lijmblokken gebruikt van het type L150/198. Per vierkante meter heb je 5,9 kg lijm nodig.
   Hoeveel kg lijm heb je nodig voor een muur van 6 m²?
   Vul hier je berekening en je antwoord in.



4. Op een pannendak liggen 22 pannen per rij. Er zijn in totaal 20 rijen naast elkaar.
   Hoeveel pannen heb je nodig?
   Vul hier je berekening en je antwoord in.

figuur 5 Voorbeeld van een toets (in Word)

Noot

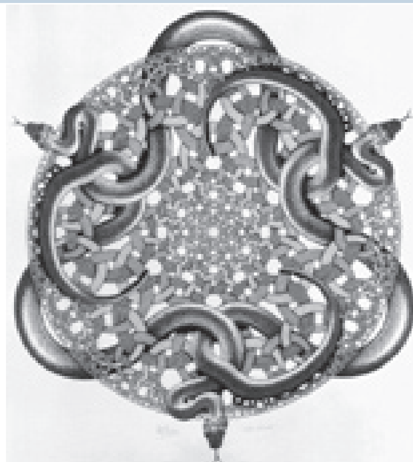
[1] *Reversed-learning* is een mechanisme dat in werking kan treden wanneer leerlingen leerstof aangereikt krijgen die ze al beheersen. De kans bestaat dat, als de leerstof iets anders aangeboden wordt, de leerlingen er ineens niets meer van snappen. Een simpel voorbeeld. Leerlingen weten hoe ze de oppervlakte van een driehoek moeten berekenen: *Oppervlakte driehoek = basis × hoogte gedeeld door* 2. Wanneer je ze formule aanbiedt maar iets anders geformuleerd: *Oppervlakte driehoek* = ½ × *basis* × *hoogte*, bestaat de kans dat leerlingen het niet op de nieuwe en ook niet meer op de oude manier kunnen. Rekenen met procenten is daarvan ook een mooi voorbeeld.

Over de auteur

Mike Weijmans is docent wiskunde aan het Ostrea Lyceum in Goes. In 2001 behaalde hij zijn tweedegraads bevoegdheid elektrotechniek I en II, in 2008 zijn tweedegraads bevoegdheid wiskunde.
E-mailadres: *mweijmans@versatel.nl*

Wiskunde en Escher in het paleis

[Bart Zevenhek]

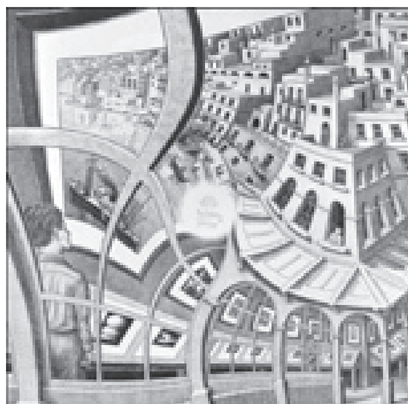


figuur 1 Ringslangen (1969) - cirkellimiet in het hyperbolische vlak, oneindigheid in Escher's laatste werk (© The M.C. Escher Company BV, Baarn)

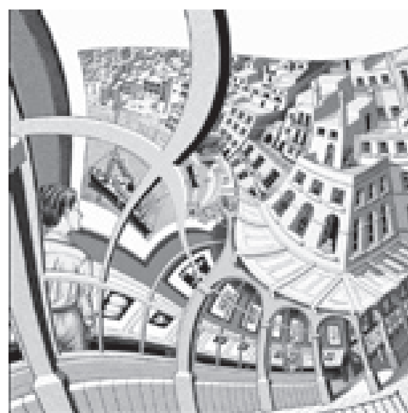
De wiskunde die ten grondslag ligt aan veel van de prenten van M.C. Escher, kan interessant zijn voor scholieren. Daarom heeft het Escher-museum, dat is gevestigd in het voormalig koninklijk paleis in Den Haag, een deel van haar website[1] gewijd aan de wiskunde achter het werk van Escher. Tevens organiseert het museum een prijsvraag over dit onderwerp. In dit artikel wil ik hierover iets uit de doeken doen.

Escher en wiskunde

De wonderlijke prenten van Escher zijn zeer geliefd bij het grote publiek. Terwijl kunstkenners nog wel eens op zijn oeuvre neerkijken, heeft het werk van Escher bij wiskundigen altijd een warm onthaal gehad. Dat is geen wonder: hoewel Escher geen wiskundige was, bevatten zijn werken veel wiskundige elementen en hebben wiskundigen zoals Penrose en Coxeter er een grote invloed op gehad. Wiskundigen herkennen Escher's passie voor regelmatige patronen, ingewikkelde structuren en onmogelijke ruimten. Toen in 1954 ter gelegenheid van het Internationale Mathematisch Congres in Amsterdam een grote tentoonstelling in het Stedelijk Museum aan Escher werd gewijd, werd zijn naam onder wiskundigen gevestigd. Ook tegenwoordig houdt het werk van Escher nog wiskundigen bezig. Zo hebben enkele jaren geleden Hendrik Lenstra en Bart de Smit van het Mathematisch Instituut Leiden het gat in de 'prententententoonstelling' van Escher weten op te vullen (***zie figuur 2*** en ***figuur 3***). Zij gebruikten hiervoor complexe e-machten en perfectioneerden hiermee de aanpak van Escher.[2]



figuur 2 Prententententoonstelling (Origineel © The M.C. Escher Company BV, Baarn)



figuur 3 Prententententoonstelling ('Leidse variant')

Escher in de tienerkamer

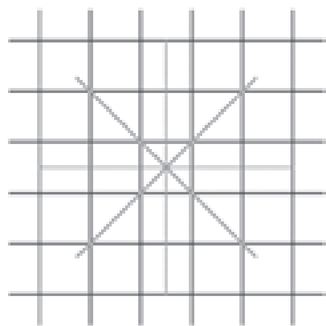
Het werk van Escher spreekt middelbare scholieren aan getuige het grote aantal praktische opdrachten en profielwerkstukken over Escher en de veel voorkomende wanddecoraties in wiskundelokalen. Ik moet bekennen dat mijn tienerkamer er eveneens vol mee hing. De wonderlijke werelden en de fascinerende paradoxen prikkelen de leerling. Zo een prikkel kunnen we maar al te goed gebruiken in onze lessen! Bovendien kan de persoon van Escher tot de verbeelding spreken. Hij was slecht in wiskunde op de middelbare school en kon eigenlijk niet eens goed tekenen. Via omwegen kwam hij in aanraking met wiskunde, om er op een intuïtieve manier mee aan de slag te gaan. Uiteindelijk werd hij één van Nederlands bekendste kunstenaars. Het moet mogelijk zijn om de wiskundige nieuwsgierigheid van leerlingen te stimuleren met behulp van Escher's prenten!

Escher in de wiskundeles?

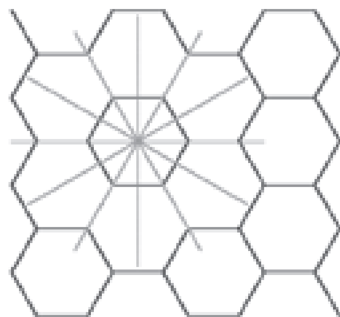
Dit is de reden dat het Escher-museum in Den Haag en de Universiteit van Leiden de handen ineen hebben geslagen. Er is subsidie gevonden om schrijver dezes aan het werk te zetten, teneinde een website op te zetten over 'Escher en de wiskunde' en een prijsvraag te ontwikkelen. Tevens komen er werkbladen met vragen over de tentoonstelling en de website, gericht op klassen die met hun wiskundedocent het museum bezoeken. De bedoeling is dat leerlingen die aan een praktische opdracht of profielwerkstuk werken een overzichtelijke bron hebben voor materiaal over Escher en de wiskunde, dat leerlingen meer bewust gemaakt worden van de wiskunde achter Escher en dat er interessante activiteiten komen rond dit thema.

Website Escher en de wiskunde

De website is ondergebracht bij de website van het Escher-museum.[2] Op dit moment bevat de website een inleiding over de wiskunde in het leven van Escher en paragrafen over vlakvullingen en metamorfosen. De biografie van Escher wordt gezien in het licht van zijn verhouding tot de wiskunde. Aan de hand van eenvoudige voorbeelden (***zie figuur 4*** en ***figuur 5***) wordt duidelijk gemaakt wat onder een regelmatige vlakvulling wordt verstaan en welke rol het begrip symmetrie hierbij speelt.

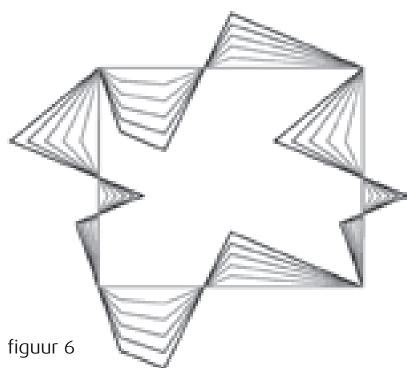


figuur 4



figuur 5

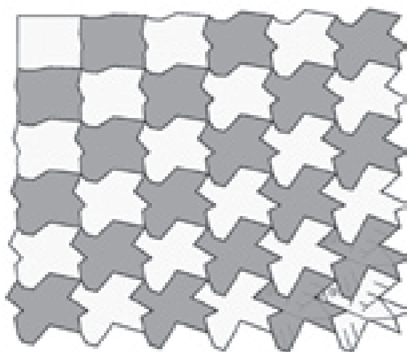
Met materiaal van Jan van de Craats over Islamitische patronen worden de 17 verschillende patronen van regelmatige vlakverdelingen besproken door middel van voorbeelden en een determinatieschema.[3] Escher heeft twee keer in zijn leven het Alhambra bezocht en de daar aanwezige decoraties, opgebouwd uit regelmatige vlakvullingen, noemde hij: 'de rijkste inspiratiebron die ik in mijn leven ben tegengekomen'. De 17 typen vlakvullingen zijn allemaal terug te vinden in Moorse paleizen en Escher heeft met alle patronen geëxperimenteerd.
Hoe een regelmatige Escher-achtige vlakvulling tot stand komt en hoe hiervan een metamorfose te vervaardigen is, wordt door middel van een uitgewerkt voorbeeld geïllustreerd (*zie de figuren 6, 7 en 8*).



figuur 6



figuur 7

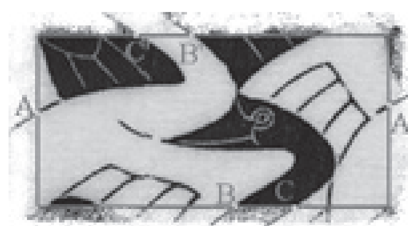


figuur 8

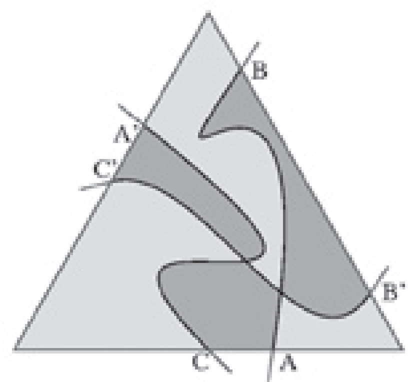
In de loop van dit schooljaar zullen er paragrafen volgen over o.a. ongebruikelijke perspectieven, ruimtelijke figuren (Möbius-band, platonische lichamen etc.), onmogelijke figuren, oneindigheid en zelfverwijzing (het Droste-effect).

Meedoen aan de prijsvraag

De prijsvraag die door het Escher-museum is georganiseerd, gaat dit jaar over vlakvullingen. Er zijn opdrachten op vmbo-, havo- en vwo-niveau. In iedere categorie zijn prijzen te behalen, onder andere van € 100,00. Tot 1 juni 2009 kan werk ingestuurd worden. Leerlingen moeten een vlakvulling ontwerpen die niet per se uit realistische objecten hoeft te bestaan, zoals bij Escher meestal wel het geval is, maar die wel moet voldoen aan bepaalde criteria en symmetrie-eigenschappen. Er wordt duidelijk gemaakt wat het principe is achter zo een vlakvulling en er worden voorbeelden gegeven van abstracte patronen die aan de voorwaarden voldoen (*zie figuur 9 en 10*).



figuur 9



figuur 10

Het Escher-museum hoopt dat wiskundedocenten deze prijsvraag onder de aandacht van hun leerlingen willen brengen.
Zelf heb ik de prijsvraag dit jaar een bestanddeel gemaakt van een praktische opdracht voor mijn 5de klas wiskunde A/C groep. Op verzoek is het Escher-museum bereid deze opdracht te mailen aan belangstellende docenten.

Tot slot...

Dat er op internet en in boeken nog veel meer te vinden is over de wiskunde achter Escher's werk dan straks op de website te vinden zal zijn, leidt geen twijfel. Het doel is echter om leerlingen de ogen voor deze rol van wiskunde in kunst te openen en hun te ondersteunen in hun pogingen daar meer van te begrijpen. Bekijk de website en oordeel zelf of dit doel hiermee bereikt kan worden.

Noten

[1] Zie: *www.escherinhetpaleis.nl*
[2] Zie ook: *http://escherdroste.math.leiden-univ.nl/index.php?menu=intro*
[3] Zie: *http://staff.science.uva.nl/~craats/SymIslam1.pdf*

Over de auteur

Bart Zevenhek is als docent wiskunde werkzaam aan het Amsterdamse Barlaeusgymnasium. Hij maakte de afgelopen jaren deel uit van de werkgroep wiskunde C en was Leraar In Onderzoek aan de Universiteit van Leiden.
E-mailadres: *bartzevenhek@gmail.com*

Vanuit de oude doos

MCMXXIX

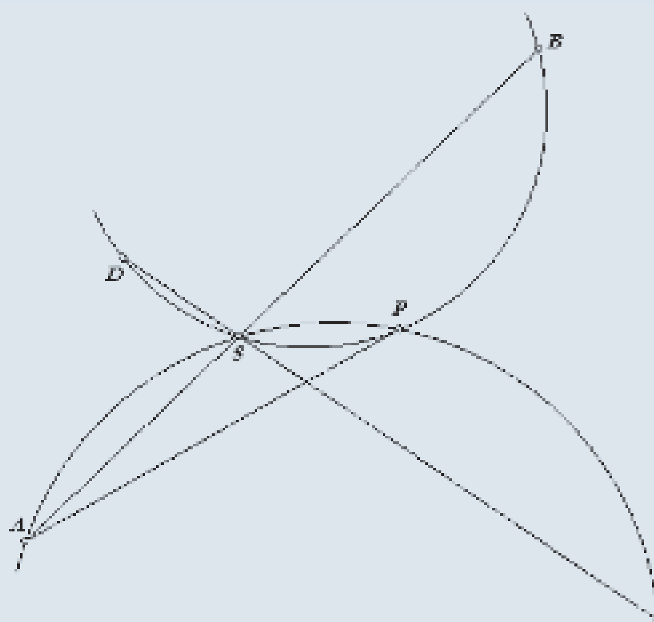
[Ton Lecluse]

Ton Lecluse is docent wiskunde en heeft een doos met oude schoolboeken uit de vorige eeuw, waar hij graag in neust. Hij vindt vaak mooie opgaven (zonder uitwerking gelukkig) die hem uitdagen een oplossing te zoeken die past in het huidige curriculum. In de rubriek 'Vanuit de oude doos' wordt in elke aflevering een juweeltje behandeld. U kunt er uw lessen mee verrijken!

Gelijkvormigheid

Naar aanleiding van een toelatingsexamen wiskunde tot de universiteiten in 1929:
Twee lijnen AB en CD van willekeurige lengte snijden elkaar in S. Als men een cirkel beschrijft door A, S en C en een tweede cirkel door B, S en D, welke cirkels elkaar voor de tweede maal in P snijden, dan is $CD \times BP = AB \times DP$. Bewijs dit.

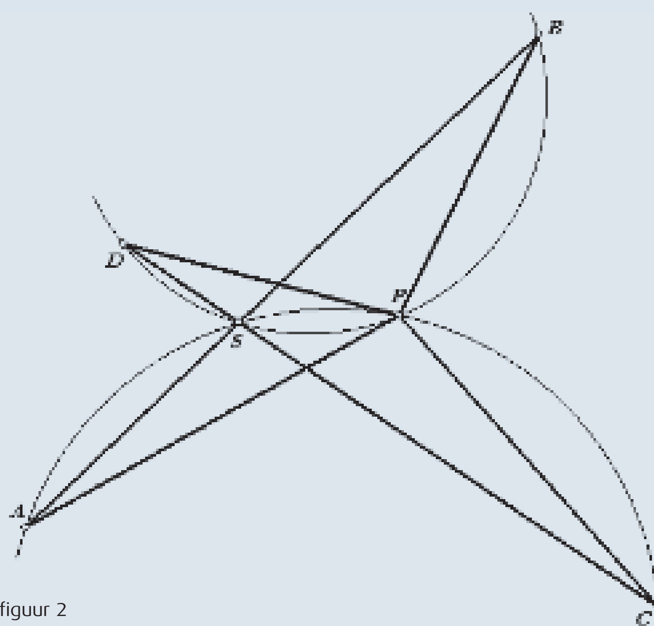
In de opgave wordt met een lijn klaarblijkelijk een lijnstuk bedoeld.
We maken een tekening (*zie figuur 1*).



figuur 1

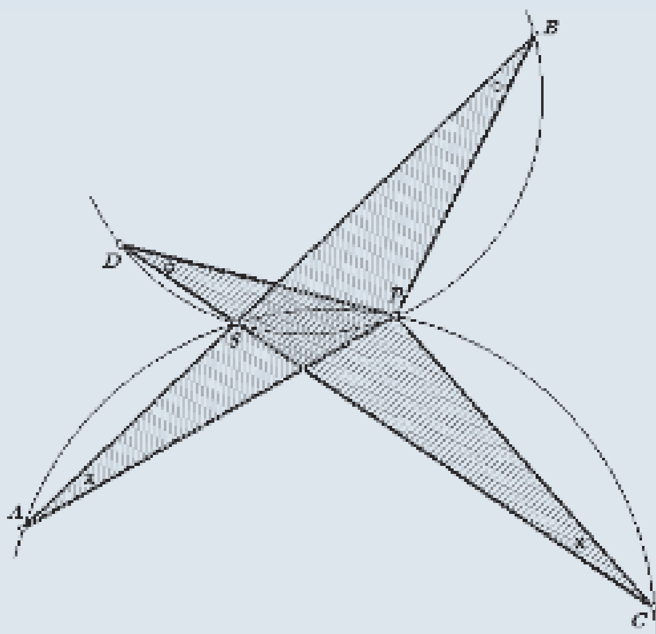
We kunnen proberen te bewijzen dat de driehoeken APB en CPD gelijkvormig zijn. Probeer dit probleem op te lossen. (Dan pas onder de streep 'spieken'!) Wellicht helpt het dit model te tekenen met een dynamisch computerprogramma.

We tekenen de twee driehoeken APB en CPD.



figuur 2

Probeer nu eens alleen te kijken naar de hoeken van deze driehoeken. Zijn er gelijke hoeken?
Niet verder lezen, eerst proberen deze figuur te doorgronden.



figuur 3

In de onderste cirkel staan de omtrekshoeken *A* en *C* beide op boog *PS*. Ze zijn dus gelijk. In de tekening zijn ze gemarkeerd met een '×'.
In de bovenste cirkel staan de omtrekshoeken *B* en *D* beide op boog *PS*. Ze zijn dus gelijk. In de tekening zijn ze gemarkeerd met een '**o**'.
De twee driehoeken hebben dus twee hoeken gelijk, en zijn dus gelijkvormig.

Discussie

Een gevaar bij een opgave als deze is dat je begint met het zoeken naar gelijke hoeken. Dat levert een aardig lijstje op. En daarbij loop je de kans door de bomen het bos niet meer te zien.
In plaats van de gestelde vraag kunt u ook laten aantonen dat $\angle APB = \angle CPD$. Dat is lastiger dan het lijkt, omdat je wellicht met deelhoeken van deze hoeken wilt gaan werken.

Een aardige (extra) vraag is te laten bewijzen dat $\angle APC = \angle BPD$. Het zijn *geen* overstaande hoeken. Maar bij *S* heb je die wel. En omtrekshoeken op gelijke bogen zijn gelijk. Maakt u het bewijs even af? (Het is niet verstandig deze vraag als inleidende vraag te stellen. De leerling zal wellicht het resultaat ervan willen gebruiken voor het beantwoorden van de oorspronkelijke vraag, en dwaalt daardoor juist af.)

Opmerkelijk is dat bij deze opgave het tekenen van het lijnstuk *PS* niet nodig is. Bij vrijwel alle opgaven waarbij twee cirkels elkaar snijden en de snijpunten een rol spelen, is het tekenen van dit lijnstuk echter wezenlijk.

Tot slot

Deze opgave is aanzienlijk eenvoudiger dan de meetkundeopgaven van andere toelatingsexamens uit de twintiger jaren van de vorige eeuw. Voor gebruik in de les (of een toets) is deze opgave mooi laagdrempelig.

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Comenius College te Hilversum.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

De afgeleide in breder perspectief

EEN PLEIDOOI N.A.V. DE STUDIEDAG OP 8 NOVEMBER 2008

[Heiner Wind]

Van Workshop naar Handboek Vakdidactiek Wiskunde

Op 8 november j.l. vond de jaarvergadering van de NVvW plaats, met het gebruikelijke aanbod van interessante workshops. Zoals altijd een pracht gelegenheid om op je vakgebied bij te tanken. Wie zulke dagen aan zich voorbij laat gaan, doet zichzelf ernstig tekort. Een van de door mij bezochte workshops werd gegeven door Joke Daemen en Gerrit Roorda en had als titel 'De afgeleide in breed perspectief'. Een uitdagend onderwerp, want aan de invoering van het begrip, of 'concept', afgeleide zitten nogal wat haken en ogen. De inleiders hebben kans gezien daar een heldere en boeiende voordracht over te houden, gebaseerd op gedegen vooronderzoek. Dat onderzoek heeft al geleid tot een hoofdstuk dat deel moet gaan uitmaken van een te publiceren *Handboek Vakdidactiek Wiskunde*. Tijdens de voordracht kwamen bij mij een paar vragen opborrelen, die ik ook wel even aan de orde gesteld heb, maar aangezien het uiteraard niet mijn bedoeling was in te breken in een mooie voordracht, heb ik dat verder laten rusten.
Na afloop werden we verblijd met het complete hoofdstuk, zodat we dat thuis allemaal nog eens rustig konden bestuderen. De workshop is op die dag twee keer gegeven. Ik schat dat dus ca. 30 personen dit hoofdstuk meegekregen hebben. Van dergelijke conferenties kom je dan moe en voldaan thuis met allerlei papierwerk en de nodige spiegeltjes en kraaltjes. Vervolgens gaan we over tot de orde van de ongetwijfeld drukke dag en dan komt mijn eerste vraag: *Hoeveel mensen zijn er aan toegekomen om het hoofdstuk nog eens grondig te bestuderen?*
Sinds dit jaar ben ik met FPU; ik had er in elk geval de tijd en de belangstelling voor, niet in het minst omdat het hoofdstuk deze aandacht verdient. Onder normale omstandigheden zou het, vrees ik, op de bekende stapel interessante lectuur terechtgekomen zijn in afwachting van betere tijden. Bij het lezen van deze (concept?) handleiding kwamen weer dezelfde en ook nog andere vragen naar boven. Toch maar laten rusten? Joke en Gerrit hebben er zoveel werk aan gehad en het maakt zo'n solide indruk, waarom dan dingen overhoop halen, zij hebben het ongetwijfeld ook heel druk, etc. Daarbij speelt ook de overweging, dat je over de aanpak verschillend kunt en mag (!) denken. Hier voel ik mij gesticht door de aardige voordracht van Lidy Wesker op diezelfde studiedag.
Kort hierna verscheen de WiskundE-brief 473 met verwijzing naar o.a. *Handboek Vakdidactiek Wiskunde* met een link naar *www.elwier.nl*. Daar valt o.a. te lezen: 'Binnen de groep van universitaire wiskundedidactici bestaat al enige jaren de behoefte om de bestaande wetenschappelijke kennis over het leren en onderwijzen van wiskunde te ordenen en samen te vatten in een handboek voor leraren en leraren in opleiding. […] Op dit moment is de bedoelde wetenschappelijke kennis her en der verspreid over tal van artikelen en slecht toegankelijk voor leraren. […] De keuze voor het ondersteunen van het ontwerpen van het eigen onderwijs, dus baas boven boek, houdt in dat wiskundeleraren (al dan niet in opleiding) daaraan overzicht, inspiratie en argumentatie kunnen ontlenen.'
Opnieuw begint het te knagen. Pracht doelstelling, maar hoe realiseer je dat? Daar hoort, zoals een rechtgeaarde onderwijzer betaamt, een beginsituatie bij.

Wat is er en wat zouden we wensen

In het genoemde hoofdstuk wordt meer dan eens verwezen naar *Didactiek van de Wiskunde* van Joop van Dormolen. Deze uitgave stamt uit begin zeventiger jaren en gold in zekere kringen als een succes. Welke kringen? In elk geval bij de opleidingsinstituten en de uitgever van het boek: het was verplichte literatuur, dus enige omzet was gegarandeerd. Ik ben ervaringsdeskundige, want ik moest in die tijd ook mijn 'aantekening' halen. Het boek heeft dan ook ca. 35 jaar mijn boekenkast enig aanzien verschaft. Praktisch ongebruikt, dat wel.
Men zou kunnen zeggen dat je dan geen recht van spreken meer hebt, maar waar ligt het dan aan dat zo'n boek niet gebruikt wordt? Ik heb in die 35 jaar niet geheel stilgezeten, steeds allerlei conferenties bezocht, nascholingen gevolgd, Platostudiereizen naar omringende landen gemaakt, docentcoach geweest voor hospitanten (LIO's) van de RUG, sinds eind jaren tachtig verzamelaar van certificaten (een stuk of veertig; kan zo bij het oud papier), heb daarbij tientallen, honderden geïnteresseerde en betrokken collega's ontmoet en gesproken, maar nooit ook maar iemand ontmoet, die *Ome Joop* ter sprake bracht.
Was het, ongetwijfeld inhoudelijk goede, boek van Van Dormolen '…slecht toegankelijk' voor de gemiddelde docent? Vermoedelijk wordt de auteur daarmee onrecht gedaan, dus iets vriendelijker geformuleerd: liet wellicht de gebruikersvriendelijkheid te wensen over? Was de inhoud zodanig, dat het boek uitnodigde om het steeds te raadplegen?
Zelf had ik in die tijd wel profijt van de boeken van Wansink (delen I, II en III) bij het onderwijzen van de toenmalige wiskunde I en wiskunde II. Deze boeken gaven heel praktische wenken voor de toen in zwang zijnde wat formelere schoolwiskunde. Dit is overigens geen pleidooi om daarnaar terug te keren, maar slechts bedoeld om aan te geven, waaraan een *handboek voor didactiek* in de eerste plaats moet voldoen: de hulp zoekende docent moet direct (h)erkennen: 'hier heb ik wat aan' en het zicht moet niet belemmerd worden door didactisch jargon. Dat er een gedegen wetenschappelijk onderzoek aan ten grondslag moet liggen, is vanzelfsprekend en de docent mag (moet?) worden aangespoord zich daarin te verdiepen. Een handboek zal dus zeker ook deze elementen bevatten.

Pleidooi voor een concreet Handboek
Een schrijver van zo'n Handboek is niet te benijden; die zit een beetje in een spagaat: enerzijds moet alles didactisch wetenschappelijk verantwoord zijn, maar anderzijds moet het heel toegankelijk zijn voor de 'gewone' gebruiker, die, daar moet niet omheen gedraaid worden, niet bij voorbaat hevig geïnteresseerd is in didactische achtergronden. Die heeft in de dagelijkse drukte al meer dan genoeg aan zijn hoofd. Dat is in het algemeen de reële beginsituatie. Het Handboek zal, als het goed is, de lezer wel inspireren tot voortdurend nadenken over het hoe en waarom. Het moet zeker geen 'recepten'-boek worden, ook al niet om een terechtwijzing van Lidy Wesker te riskeren.
Terug naar het hoofdstuk over de afgeleide.
Ik zal hier niet in detail ingaan op mijn vragen over de inhoud, maar het komt mij voor dat, los van de kwaliteit van het gebodene, het misschien aanbeveling zou verdienen dit hoofdstuk, maar ook alle andere, te screenen op de volgende aspecten:

- herkenbaarheid van concrete toepassingen;
- gebruiksvriendelijk en uitnodigend;
- toegankelijk;
- inspirerende achtergrondinformatie met een beperking van het didactisch jargon.

Het zou kunnen leiden tot, laten we zeggen, een gekuiste versie, die de harten van de gebruiker direct sneller doet kloppen.
De babyboomers staan op het punt met FPU te gaan, of zijn dat al. Er moet toch een arsenaal aan ervaring zijn om gebruik van te kunnen maken. Daarnaast biedt de huidige ICT prachtige mogelijkheden om een uitgave te verlevendigen: een dvd met voorbeelden (geen voorschriften) van echte, gegeven lessen over bepaalde onderwerpen om maar eens wat te noemen.
En of het uit te geven boek Handboek of Handreiking moet heten, laat ik in het midden.
Ik hoop van harte dat hierdoor de afgeleide in nog breder perspectief komt te staan.

Over de auteur
Heiner Wind is sinds 2008 met FPU. Daarvoor was hij als wiskundedocent werkzaam aan het Wessel Gansfortcollege in Groningen.
E-mailadres: *hwind@home.nl*

Aankondiging / Vroeger was alles beter...

9 april 2009, Amsterdam: Een symposium over de aansluitproblematiek in het wiskundeonderwijs

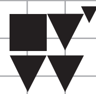
We leven in een dynamische tijd waarin in hoog tempo heel veel verandert. De grote betekenis van de wiskunde voor de samenleving staat daarbij niet ter discussie. De wijze waarop het wiskundeonderwijs van basisschool tot en met de universiteit moet worden ingericht daarentegen wel.
Ter gelegenheid van het afscheid van opleidingsdirecteur Freek van Schagen organiseert de Afdeling Wiskunde van de VU op 9 april 's middags het symposium *Vroeger was alles beter…*, over aansluitingsproblematiek in het wiskundeonderwijs.
De keuze van de sprekers garandeert een boeiende middag voor iedereen die interesse heeft voor het wiskundeonderwijs in relatie met de rol van de wiskunde in de wereld om ons heen.

Plaats
Zaal KC 1.59 in het gebouw voor wiskunde en de natuurwetenschappen van de VU, De Boelelaan, Amsterdam (voor plattegrond zie *www.vu.nl/nl/Images/plattegrond3d_tcm9-209.pdf*; de zaal bevindt zich tussen de gebouwen 4 en 5).

Programma

13:45u	Welkom door voorzitter Teun Koetsier
13:50u	Jan van de Craats (UvA): *Het ABC van de aansluiting*
14:15u	Jan van Maanen (Freudenthal Instituut): *Over aansluiters en aangeslotenen*
14:40u	Discussie
14:50u	Pauze
15:10u	Jan Aarts (emeritus TUD): *BaMa aansluiters de maat genomen*
15:35u	Freek van Schagen (VU): *Breuken in de wiskundeopleiding*
16:00u	Discussie
16:05u	Formeel intermezzo: Jan van Mill (decaan Faculteit der Exacte Wetenschappen, VU) en anderen
16:20u	Sluiting door Freek van Schagen en de voorzitter
16:30u	Borrel in M0

Aanmelding bij mevr. Maryke Titawano (e-mail: *MWS.Titawano@few.vu.nl*); inlichtingen bij de organisatoren René Swarttouw (e-mail: *RF.Swarttouw@few.vu.nl*) en Teun Koetsier (e-mail: *T.Koetsier@few.vu.nl*).



Van de bestuurstafel

ONDERWERPEN UIT DE BESTUURSVERGADERINGEN

[Kees Lagerwaard, secretaris NVvW]

Hoewel ik al heel veel jaren lid ben van de NVvW, wist ik niet zo veel van de Vereniging. Ja, je ontvangt een aantal keer per jaar *Euclides* en daar staat telkens veel interessants in over het vak wiskunde en meer in het bijzonder over wiskunde-onderwijs. Primair beschouw je zo'n blad toch als een platform voor mensen die het beroep van wiskundeleraar met elkaar gemeen hebben en daarmee een zekere belangstelling en betrokkenheid delen. Maar zie je daar nou meteen ook de Vereniging in terug? Denk je bij het lezen in *Euclides* voortdurend aan het feit dat het blad het orgaan van de Vereniging is? Ik niet. Wel in de rubriek 'Van de bestuurs-tafel' natuurlijk, maar verder… Anders is het met die jaarlijkse zaterdag in november waar honderden collega's naar de jaarvergadering plus studiedag komen. Daar ben je je er echt van bewust dat je lid bent van een Vereniging. Net als in de eindexmen-periode. De Vereniging organiseert de centrale en regionale examenbesprekingen. Dat voelt ook wel als een activiteit van een vereniging. Maar het aantal collega's dat deelneemt aan die besprekingen is toch vrij beperkt. Gelukkig weten velen wel de site te vinden waarop de afspraken staan rondom het verfijnen van het correctievoorschrift. In die periode ontstaat er op die site een uitgebreide uitwisseling van meningen en ervaringen rondom dat eindexamen. Dat is het wel zo'n beetje wat ik als lid van mijn Vereniging merkte… tot ik dit najaar toetrad tot het bestuur. Toen bleek dat er toch wel heel wat meer aan de hand is in die Vereniging. Om degenen die er zoals ik tegenaan kijken, deelgenoot te maken van zaken die binnen de Vereniging spelen, schrijf ik eens wat op over activiteiten die binnen de Vereniging gaande zijn. Ik doe dat aan de hand van onderwerpen die in de bestuursvergaderingen aan de orde komen. Het bestuur vergadert maandelijks in Utrecht. Een greep uit de onderwerpen die tijdens de laatste twee bestuursvergaderingen aan de orde kwamen staat, in min of meer willekeurige volgorde, hieronder.

Werkgroep havo/vwo

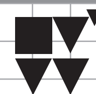
Deze actieve werkgroep van de Vereniging heeft de afgelopen tijd gewerkt aan een exit-toets wiskunde A vwo. Zoals bekend worden op verschillende universiteiten en hogescholen entreetoetsen afgenomen bij eerstejaarsstudenten. Dit is een gevolg van onvrede over het beheersingsniveau van de algebraïsche vaardigheden bij beginnende studenten. Vanuit het vo zijn er kritische commentaren gewijd aan zowel de inhoud als de formulering van vragen in deze toetsen. Het leek soms meer een toets over wat men bij het hoger onderwijs zou wensen dat de beginnende studenten kunnen, dan een toets die past bij het onderwijs dat die studenten net hebben afgesloten. De Werkgroep havo/vwo heeft nu bij wiskunde A vwo een toets ontwikkeld die aansluit bij de algebraïsche vaardigheden die binnen het vak wiskunde A werkelijk aan bod (horen te) komen. Zo'n toets heeft niet de pretentie het eindexamen te vervangen. Het gaat immers slechts om een zeer beperkt deel van het eindexamenprogramma wiskunde A.
Het voornaamste doel van zo'n exit-toets is het hoger onderwijs een goed beeld te geven van de algebraïsche vaardigheden binnen het vak wiskunde A. Idealiter zouden universitaire entreetoetsen en deze exit-toets kunnen gaan samenvallen. En wellicht zou zo'n exit-toets ook binnen het wiskunde-A-onderwijs een rol kunnen spelen. De werkgroep heeft de exit-toets aan het bestuur aangeboden en zal samen met het bestuur een plan opstellen om hiervan zowel in het vo als het ho nuttig gebruik te kunnen gaan maken.

Jaarvergadering/studiedag

De reacties op de studiedag van 8 november j.l. waren heel positief. Onder leiding van Marianne Lambriex genoten we van een prima georganiseerde en inhoudelijk voortreffelijke dag. Inmiddels zijn alweer voorbereidingen gestart voor de volgende op **zaterdag 7 november 2009**. Een bijzonder punt van aandacht is dat we meer vmbo-werkgroepen aanbieden. In ons ledenbestand is het aantal vmbo-docenten verhoudingsgewijs gering. Maar de meeste leerlingen in het voortgezet onderwijs zitten op het vmbo. Dat betekent dat een groot deel van de wiskundelessen door vmbo-docenten wordt gegeven. We zouden dan ook graag zien dat meer vmbo-docenten actief lid van de Vereniging worden. Daarvan willen we in de komende tijd meer werk gaan maken.

Examenbesprekingen

Hemelvaartsdag en Pinksteren vallen elk jaar in de eindexamenperiode. Dat geeft soms problemen bij het organiseren van de examenbesprekingen. Gewoonlijk is er op de dag *na* de afname van een examen een centrale bespreking met de regionale gespreksleiders, en de daarop volgende dag zijn de regionale besprekingen. Wanneer een examen net voor Hemelvaartsdag wordt afgenomen, kunnen de regionale besprekingen pas na het weekend, dus vijf of zes dagen later worden gehouden. Maar intussen willen veel docenten dat lange weekend (de vrijdag na Hemelvaartsdag



is meestal een vrije dag) gebruiken om de examens na te kijken. Dan komt zo'n regionale examenbespreking toch een beetje als mosterd na de maaltijd. En meestal wordt de lijst met afspraken op de avond na die besprekingen op de NVvW-website gezet. Dat is voor velen dus eigenlijk te laat. Komende examenperiode zijn er weer dergelijke knelpunten. In *Euclides* leest u binnenkort welke oplossingen we hebben bedacht.

RekenVOort

De Vereniging heeft een projectvoorstel ingediend bij het ministerie van OCW om rekenmodules te ontwikkelen voor leerlingen die in hun examenpakket geen wiskunde hebben. Voor vmbo zijn dat leerlingen in de sectoren Zorg&Welzijn en Economie. Voor havo betreft het leerlingen in het profiel C&M. Wanneer deze leerlingen doorstromen naar mbo of hbo laat de daar gewenste rekenvaardigheid vaak ernstig te wensen over. U herinnert zich ongetwijfeld de publiciteit rond de rekenproblemen bij de pabo-instromers. Maar ook bij andere mbo- en hbo-studierichtingen is een redelijke rekenvaardigheid noodzakelijk. En dan zwijgen we nog over de noodzaak van gecijferdheid voor ieders functioneren in de maatschappij.
Welnu, het ministerie heeft dit project toegezegd. Inmiddels hebben we via een e-mailing naar de leden, een oproep in de wiskundE-brief en een oproep op onze website belangstellende docenten en scholen gezocht om dit project te kunnen uitvoeren. De respons overtrof, met name bij havo, onze verwachtingen. Inmiddels zijn er zowel voor vmbo als voor havo teams met ontwikkelaars gevormd en zijn pilotscholen gevonden waar de te ontwikkelen rekenmodules worden uitgetest. Het project wordt uitgevoerd in samenwerking met het Freudenthal Instituut. Het bestuur heeft Gert de Kleuver weten te strikken voor het projectleiderschap. De looptijd van het project is minder dan 2 jaar. We zullen u op de hoogte houden van de vorderingen.

Digitalisering van leermiddelen

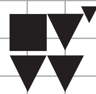
In samenspraak met de VO-raad is bij het ministerie een projectvoorstel ingediend om te komen tot een Open Leermiddelenbank Wiskunde. Wiskunde is hier eigenlijk de voorloper, je zou ook kunnen zeggen proefkonijn. Wanneer dit project succesvol blijkt te zijn, zullen dergelijke initiatieven ook worden gestart voor andere vakken. Het doel is om te komen tot een omvangrijke en gemakkelijk benaderbare digitale leermiddelenbank. Enerzijds moet er op vele plaatsen reeds ontwikkeld digitaal lesmateriaal worden verzameld, anderzijds moet dat op een zeer overzichtelijke, toegankelijke en hopelijk ook samenhangende manier worden klaargezet voor gebruik in het onderwijs. Ook dit project is toegekend en met de uitvoering zal spoedig een begin worden gemaakt. Binnenkort zult u van het bestuur hierover meer horen.

IMO 2011

Winnaars van de Nationale Wiskunde Olympiades uit een groot aantal landen treffen elkaar elk jaar bij de Internationale Olympiade. Die *International Mathematics Olympiad* zal in 2011 in Nederland plaatsvinden. Zo'n finale krijgt altijd heel veel publiciteit. Dit biedt ook ons een gelegenheid om wiskunde in het middelpunt van de belangstelling te plaatsen.
Het bestuur wil deze kans beslist niet voorbij laten gaan. Ook u wordt van harte uitgenodigd ideeën naar voren te brengen.

De NVvW-site

Er worden plannen ontwikkeld om onze website wat nieuw leven in te blazen. We zullen proberen de wiskundeactualiteit op de voet te volgen en ook nieuws vanuit het bestuur en de werkgroepen snel op het web te zetten. Ook willen we proberen de discussie op het Forum wat meer op gang te brengen. Rondom de eindexamens wordt het Forum intensief bezocht, maar de rest van het jaar is het daar te stil. En dat terwijl het wiskundeonderwijs toch het hele jaar door volop in beweging is.
Kijk de komende tijd eens wat vaker op *www.nvvw.nl*, dan ziet u ook of het lukt.



De eerste geregistreerde wiskundeleraar

HET VERVOLG VAN 'DE KRACHT VAN EEN BEROEPSREGISTER VOOR WISKUNDELERAREN'

[Marianne Lambriex]

Inleiding

Er is er een start gemaakt met een mogelijk beroepsregister voor alle docenten naar aanleiding van het in werking treden van de wet BIO (beroepen in het onderwijs) op 1 augustus 2006. De NVvW heeft het initiatief naar zich toegetrokken om uit te zoeken wat een beroepsregister voor docenten wiskunde zou kunnen inhouden en welke gevolgen dat zou kunnen hebben voor onder andere professionalisering. Het onderzoek door de projectgroep WiVa is afgerond in het voorjaar van 2008. Het rapport is aangeboden aan het bestuur en tijdens de jaarvergadering op 8 november 2008 aan de leden gepresenteerd. Er is een begin gemaakt met proefregistratie. Het totale traject van invoering van een beroepsregister zal overigens enkele jaren in beslag nemen. Dit artikel is het vijfde van een serie over WiVa ('wiskundeleraar vakvaardig', beroepsstandaarden voor wiskundeleraren) en gaat over het vervolg en de WiVapilot 'Proefregistratie'.

Opbrengst studiedag 2008

Op de drukbezochte jaarvergadering werd niet alleen het rapport besproken maar werd ook de aftrap gegeven van het tweede deel van het WiVa project: de daadwerkelijke proefregistratie. Wederom werken het SBL en het FI mee aan het project. De weg naar de totstandkoming van de pilot is vastgelegd in een boekje 'WiVa: Wiskundeleraar Vakbekwaam' dat aan elke deelnemer van de studiedag is uitgereikt. Tevens kon men tijdens de nog drukker bezochte studiedag deelnemen aan een workshop en daarin meepraten en meedenken. De opbrengst hiervan was groot en legde de basis voor een zelfevaluatieformulier waarmee een wiskundeleraar zijn eigen wiskundige vakvaardigheden kan scoren.

Ook werd tijdens de jaarvergadering een oproep gedaan aan de leden om constructief mee te werken aan de opzet van het register. Op deze oproep werd tot onze vreugde massaal gereageerd: 48 leraren vulden de oproepkaart in. Deze groep, aangevuld met Dédé de Haan (FI), Barbara van Amerom (FI) en mijzelf, is de voorhoede van registerdocenten; zij vormen de pilotgroep WiVa2. Deze pilotgroep is bijzonder gevarieerd samengesteld: van beginnend tot zeer ervaren, van tweedegrader tot lerarenopleider, van freelancer tot volledige aanstelling, van éénvakker tot veelvakker, en van jong tot oud (zelfs gepensioneerd). Kortom, een mooie afspiegeling van de hele populatie wiskundeleraren.

Voortgang pilot

Op het moment van schrijven van dit artikel is de pilotgroep twee maal bij elkaar geweest en bij het verschijnen van deze *Euclides* zeer waarschijnlijk al een derde keer. Bij de eerste bijeenkomst op 24 november j.l. waren 22 belangstellende en enthousiaste wiskundeleraren aanwezig. Tijdens deze avond is gesproken over:

- het rapport en inventarisatie van de opbrengst van de workshop;
- ieders professionaliseringsactiviteiten in een normale werkweek;
- de verhouding tussen generieke en vakspecifieke bekwaamheden;
- de koppeling van professionaliseringsactiviteiten aan bekwaamheden.

Als huiswerk kregen de deelnemers het verzoek om gedurende twee weken een dagboek bij te houden van ondernomen professionaliseringsactiviteiten met bijbehorende bewijzen.

Tijdens de tweede bijeenkomst in januari 2009 hebben de deelnemers zich ingeschreven in het initiële register. Een mijlpaal! *De eerste geregistreerde wiskunde leraar* is Lennart de Jonge, te zien ***op foto 1***, uiterst links. Hij is ook de eerste landelijk geregistreerde leraar. De onderwerpen van de avond waren:

- een verdieping in de zeven SBL-competenties met QuickScan op *www.lerarenweb.nl*;
- een bespreking van de opbrengst van het bijgehouden dagboek. Belangrijke vraag was of de opsomming van competenties volledig was. Er is een voorstel geformuleerd voor weging van en/of credits bij activiteiten.
- de eisen die gesteld worden aan de informatie op de registersite;
- de rol van NVvW en SBL in het verlenen van service rond de registratie;
- een bestudering van de SBL-site;
- gezamenlijk inschrijving in het initiële register.

Er volgt in maart 2009 nog een afsluitende pilotbijeenkomst waarop over de volgende vragen gesproken zal worden:

- Hoe hoort een registratiecommissie eruit te zien? Is er een commissie van beroep nodig?
- Wat zou registratie moeten/mogen kosten aan tijd en geld?
- Welke problemen zijn er ontstaan bij de proefregistratie?
- Wat zou je nog moeten doen om aan de criteria te voldoen?

Na deze vragenronde stelt iedereen voor zich een plan op voor de komende twee jaar waarmee het mogelijk is registerleraar te worden. Aan het eind van de bijeenkomst in maart evalueren we het proefregistratie-traject en stellen een plan op voor het vervolg.

Opbrengst

De bijeenkomsten zijn tot nu toe zeer geanimeerd, leerzaam en bijzonder waardevol. Het bleek al snel dat de deelnemers niet zomaar een afspiegeling zijn van de hele populatie wiskundeleraren, maar eerder een greep uit de groep van zeer actieve en gemotiveerde docenten. Zij vinden al gauw dat een professionaliseringsactiviteit, met name de informele, eigenlijk gewoon bij het beroep hoort en dat het vreemd is om daar credits voor het beroepsregister voor te geven. Een voorbeeld hiervan is 'het bijhouden van vakliteratuur (bv. via *Euclides*)'. Maar hoeveel leraren wiskunde lezen *Euclides* niet? Meer niet dan wel! Reden genoeg om hiervoor wel credits, of punten, te geven in het register. Zo ontstaat een verdeling in professionaliseringsactiviteiten: formeel (bijv. het deelnemen aan een conferentie, met certificaat) en informeel, maar ook een verdeling in direct (werken aan je eigen vakbekwaamheid) en indirect. Voorstellen over wat wel en niet meetelt, en hoeveel punten je daarvoor krijgt, zijn nog in discussie. Ook is er sprake van het bijhouden van een map waarin men de bewijzen van informele en indirecte professionalisering bijhoudt; een naam is er ook al aan gegeven: de *WiVaMap*.

Andere vakverenigingen

De NVvW is niet de enige vakvereniging die een pilot uitvoert met betrekking tot proefregistratie. Ook de VECON (economen) en de LT (Levende Talen) hebben samen met de SBL een eigen traject uitgezet. De drie vakverenigingen vormen samen met de KVLO (lichamelijke opvoeding) de landelijke voorhoede en hebben hier uiteraard veelvuldig overleg over. Maar er zijn nog meer belangstellende vakverenigingen, zoals de NVON, KNAG, NVLM, BDD, LBib, VCN, I&I, VGN, VDLG, VLBV en NVTO, die ons op de voet volgen en ook zitting hebben in de zogenoemde discussiegroep. Deze groep bewaakt de voortgang en heeft als hoofdtaak het opleveren van een afstemmingsdocument waarin alle vakverenigingen zich kunnen vinden. De problemen die ontstaan zijn en vragen die opkomen vanuit de pilots, worden in de groep geïnventariseerd, en er wordt gezamenlijk naar een oplossing gezocht. Dat is niet altijd even eenvoudig: een leraar Frans heeft soms andere prioriteiten dan een wiskundeleraar. Namens de NVvW heeft Douwe van de Kooi zitting in deze belangrijke groep.

Verdere ontwikkelingen

Het bestuur realiseert zich heel goed dat er nu weliswaar een start is gemaakt met het register, maar dat de uiteindelijk vorm nog niet vastligt. Tijdens de komende twee jaar zal er nog het nodige aangepast, beschreven en ontworpen moeten worden.
De eerste pilotbijeenkomsten zijn voorbij en de eerste wiskundeleraren hebben zich ingeschreven in het initiële register, maar de pilot loopt nog door tot december 2010. Het is de bedoeling dat de leraren uit de pilotgroep gaan aantonen dat er gedurende de komende twee jaar een duidelijke ontwikkeling is in hun professionaliteit. Na afloop van die twee jaar hebben ze daar bewijzen voor verzameld. Als ze deze bewijzen kunnen overleggen en ook nog steeds werkzaam zijn als wiskundeleraar, kunnen ze worden ingeschreven in het beroepsregister. Vanaf dan zijn ze *registerleraar*. Gedurende de komende twee jaar worden de standaarden, indicatoren, bewijsstukken, instrumenten en registratieprocedure voortdurend geëvalueerd en bijgesteld.

Iets voor u?

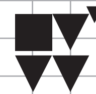
Als u nu de kriebels hebt en alsnog aan de pilot wil deelnemen, bent u van harte welkom. Neem dan contact op met Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*).

Fotografie

Dédé de Haan

Verwijzingen

- M. Lambriex (2008): *De kracht van een beroepsregister voor wiskundeleraren*. In: *Euclides 84*(2), pp. 76-77.
- NVvW ism. SBL en FIsme (2008): *Beroepsregister voor wiskundeleraren / Een bloemlezing uit het rapport 'WiVa Wiskundeleraar Vakbekwaam'*. Uitgebracht op de Studiedag van de NVvW op 8 november 2008.



WiVa

Het bestuur van de NVvW heeft de projectgroep WiVa (Wiskundeleraar Vakvaardig) samengesteld, waarin ook de SBL (Stichting Beroepskwaliteit Leraren) en het FI (Freudenthal Instituut) participeren. Doel is beroepsstandaarden voor wiskundeleraren te ontwikkelen, en tevens registratiecriteria voor opname in het lerarenregister en vakspecifieke eisen voor continue professionalisering te ontwikkelen. De projectgroepleden zijn Marianne Lambriex (NVvW), Dédé de Haan (FI) en Barbara van Amerom (FI). E-mailadres Marianne Lambriex (contactpersoon): *m.lambriex@nvvw.nl*



foto 1



foto 2

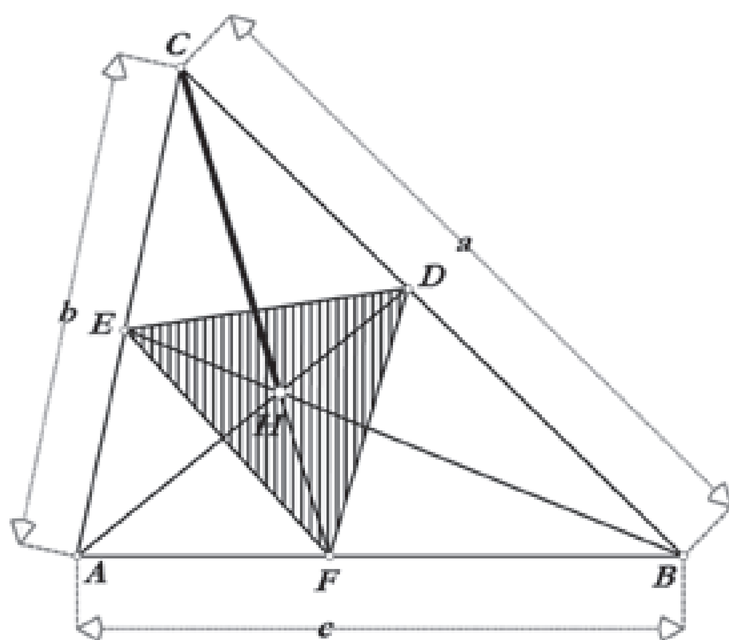
RECREATIE

Puzzel 84-5

Bissectrices

[Frits Göbel]

In een oud schriftje kwam ik allerlei formules tegen waarvan er drie over bissectrices gaan. Deze leken me wel geschikt voor de nu volgende opgaven.
De eerste opgave is nogal saai. Deze is meer bedoeld als 'warming up', waarmee niet gezegd wil zijn dat de formules die daarbij gebruikt (kunnen) worden, ook alle nodig zijn bij de andere opgaven.



figuur 1

Opgave 1
Gegeven is een driehoek *ABC* met zijdelengten *a*, *b*, *c*. Laat *H* het snijpunt van de bissectrices zijn (***zie figuur 1***).
Druk de lengte van *CH* uit in *a*, *b* en *c*.

In de volgende opgave is de basis *AB* de enige zijde in driehoek *ABC* waarvan de lengte (*c*) gegeven is. De lengten van *AC* en *BC* verhouden zich als $p : q$ met $p \neq q$.
De driehoek ligt daarmee dus niet vast, zelfs zijn hoogte niet. Maar de hoogte heeft wel een maximale waarde.

Opgave 2
Druk dit maximum uit in *c*, *p* en *q*.

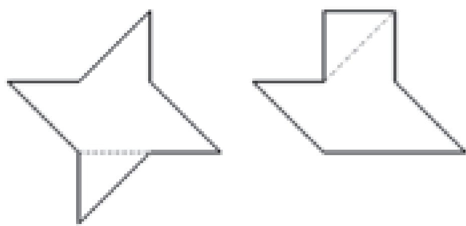
In bovengenoemd schriftje is deze opgave een constructie, waarbij *p* en *q* als lijnstukken zijn gegeven. Maar opgaven waarbij de oplossing een figuur is, probeer ik zoveel mogelijk te vermijden.
De volgende opgave is wat minder eenvoudig dan de vorige twee, maar het fraaie antwoord is de moeite wel waard.

Opgave 3
In driehoek *ABC* zijn *D*, *E*, *F* de snijpunten van de bissectrices met de zijden (zie weer ***figuur 1***).
Druk het quotiënt (opp. *DEF*) / (opp. *ABC*) uit in *a*, *b* en *c*.

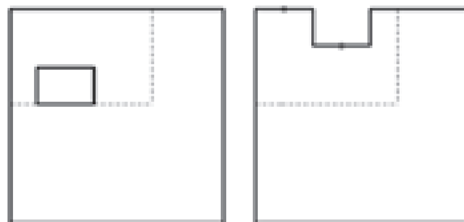
Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 27 maart 2009.
Veel plezier!

Oplossing 84-3

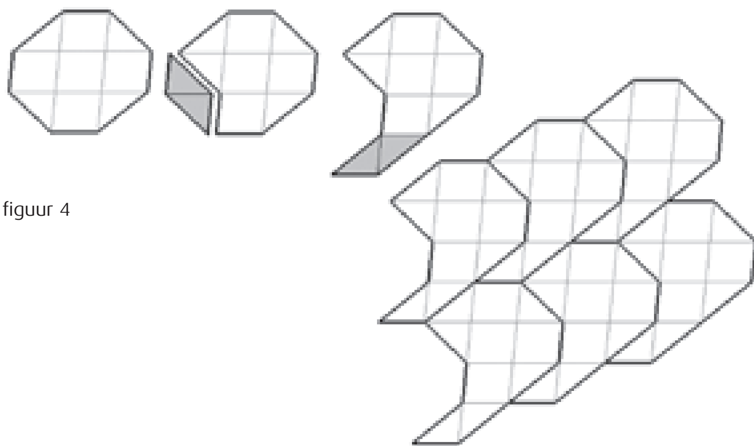
Vlakvullers



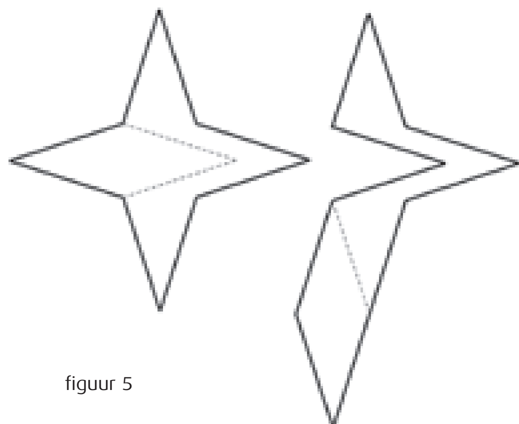
figuur 2



figuur 3



figuur 4



figuur 5

Er waren 21 inzendingen, waarvan slechts drie niet volledig. Men vond de opgaven over het algemeen eenvoudig. Alhoewel het niet nodig was, ging menig oplossing vergezeld van betegelingen, soms zelfs in kleur!

De opgaven a en b werden door iedereen goed opgelost. Er zijn meer manieren, zoals door diverse oplossers ook werd aangegeven. ***Figuur 2*** geeft één van de mogelijkheden voor opgave a. Bij opgave b merkte Hans Linders op dat de afmetingen niet zonder meer duidelijk zijn, en hij gaf een aardige oplossing voor een rechthoekig gat; ***zie figuur 3***.

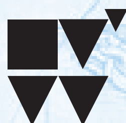
De opgaven c en d waren wat moeilijker. Monica Woldinga gaf een oplossing voor een speciale achthoek die weliswaar punt-transitief is, maar niet regelmatig; zie haar enigszins aangepaste ***figuur 4***. Voor Monica en haar supporters: ik heb dit natuurlijk goed gerekend. Het grappige is overigens dat de ster in opgave d een lijn-transitieve achthoek is. De oplossing voor deze ster ziet u ***in figuur 5***.

Ladderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
L. de Rooij 532
G. Riphagen 474
L. van den Raadt 382
H. Klein 372
W. Doyer 355
N. Wensink 248
T. Kool 246
J. Hanenberg 219
K. Verhoeven 217

SERVICEPAGINA

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen

Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*

Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Voor overige internet-adressen zie *www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php*

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie *www.wiskundeonderwijs.nl*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	21 april 2009	3 maart 2009
7	2 juni 2009	7 april 2009
8	7 juli 2009	19 mei 2009

2009

woensdag 8 april, op de scholen
Grote Rekendag
Organisatie FIsme

donderdag 9 april, Amsterdam
Symposium 'Vroeger was alles beter'
Organisatie VU Amsterdam
Zie pag. 197 in dit nummer.

di. 14 en wo. 15 april, Groningen
45ste Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie RUG en KWG

vrijdag 8 mei, Leiden
Nascholingsdag: Dekpuntstelling van Brouwer
Organisatie Universiteit Leiden

woensdag 13 mei, Utrecht
Studiemiddag 'Rekenproblemen van "ik snap het niet" tot dyscalculie'
Organisatie APS

zaterdag 16 mei, Utrecht
HKRWO-symposium XV: Top of Flop?
Organisatie HKRWO
Zie pag. 184 in dit nummer.

maandag 18 mei, Utrecht
Studiemiddag 'Rekenen, de overgang van po naar vo'
Organisatie APS

maandag 3 juni, Utrecht
Studiemiddag 'Rekenbeleid bij u op school'
Organisatie APS

vrijdag 19 juni, Utrecht
Workshops 'Bèta onder de Dom'
Organisatie Universiteit Utrecht i.s.m. BEST-Utrecht

getal & ruimte
wi onderbouw editie 2008

NIEUW!

40

epn

De nieuwe onderbouweditie getal & ruimte is uit.

Met 20-30 extra rekenlessen. Nieuwsgierig?

Vraag een rekenles aan of kom naar de regionale getal & ruimte gebruikersbijeenkomsten. Neem contact op met klantenservice via (030) 638 3001 of e-mail salessupport.vo@epn.nl.

getal & ruimte
op getal & ruimte kun je rekenen
AL 40 JAAR

Meer weten? Kijk op **www.getalenruimte.epn.nl**



NETWERK

wiskunde die werkt!

Per 01-08-2009 ook English edition voor vwo

Netwerk 4e editie

Compleet voor vmbo, havo en vwo onderbouw en Tweede Fase



Noordhoff Uitgevers

- Compacte leerlijnen
- Pragmatisch
- Voor vmbo: wiskunde met je handen
- Voor havo/vwo: puzzelen en denken
- Aandacht voor rekenvaardigheden
- Uitgebreide ICT voor vmbo en havo/vwo

Meer informatie op www.netwerk.noordhoff.nl